

Euclide e il pensiero scientifico nel terzo secolo A.C.¹

Renato Migliorato

Giuseppe Gentile²

Dipartimento di Matematica, Università di Messina

Email: renato.migliorato@www.unime.it; pippogentile@dipmat.unime.it

Abstract

La critica al testo di Euclide, pur assumendo diverse posizioni, parte generalmente dalla preventiva assunzione che l'autore degli Elementi sia totalmente interno alla tradizione Platonico Aristotelica. La tesi sostenuta in questo lavoro è che molte delle difficoltà e delle contraddizioni riscontrate dalla critica, hanno la loro radice in tale assunzione. Gli autori sostengono che Euclide fu uno scienziato pienamente inserito nel nuovo clima culturale dei Regni Ellenistici, e particolarmente nel Museo di Alessandria. In questo clima, caratterizzato da vivaci dispute filosofiche, gli scienziati, e in particolare Euclide, tendono ad ottenere risultati stabili, evitando di pronunciarsi sull'essere reale degli oggetti scientifici e sulla verità dei principi.

1. Introduzione

Anche se non mancano, in momenti a noi più vicini, importanti novità negli studi critici sulla geometria di Euclide, il periodo che va tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, è sicuramente quello più intenso e fecondo, quello in cui si costituisce un assetto critico considerato tutt'ora *quasi* definitivo. Infatti dal 1883 al 1916 è stata pubblicata l'edizione di Heiberg e Menge³ delle opere di Euclide, il testo a cui tutt'ora si fa riferimento come il più attendibile e presumibilmente il più vicino all'originale. Del primo novecento sono traduzioni con commenti più o meno ampi e note, fondate sul testo di Heiberg, come quella italiana curata da Federigo Enriques⁴ o quella inglese di Thomas Heath⁵, e varie elaborazioni critiche degli stessi e di altri autori⁶. Tra le opere più recenti che propongono nuove ipotesi interpretative, ci sembrano da citare due articoli e una monografia di Lucio Russo⁷, Una monografia di Francesca Incardona⁸ e un volume di Imre Toth⁹

I due articoli di Russo riguardano le prime sette definizioni del primo libro degli *Elementi*, che egli sostiene essere interpolazioni successive. Con ciò verrebbe a cadere il maggior elemento a favore di un preteso platonismo di Euclide. L'ipotesi, ampiamente argomentata e documentata dall'autore, ci sembra da accogliere perché non solo è storicamente attendibile, ma anche perché ci sembra la più idonea a rispondere a difficili problemi rimasti insoluti sull'interpretazione dell'opera euclidea.

Il volume "*La rivoluzione dimenticata*", ancora di Russo, richiederebbe invece una più complessa e articolata valutazione che, nelle sua globalità, esula dall'oggetto e dallo scopo del presente lavoro. Tuttavia l'ipotesi di fondo del libro non può rimanere esclusa dalla nostra analisi.

Significativa, ai nostri fini, ci sembra il saggio introduttivo con cui F. Incardona accompagna la sua traduzione dell'*Ottica* di Euclide. Interessanti ci sembrano in particolare le argomentazioni che por-

¹ Lavoro supportato dall'Università di Messina con i fondi per i Progetti di Ricerca d'Ateneo (PRA).

² Il Lavoro, coordinato da R. Migliorato, è frutto di una collaborazione che ha visto entrambi gli autori impegnati contemporaneamente su tutti gli aspetti trattati. Anche le ricerche effettuate separatamente venivano infatti discusse punto per punto prima che si decidessero le soluzioni da adottare. L'apporto di G. Gentile, che si concretizza tuttavia in modo prevalente nelle sezioni 2, 3 e 5, può complessivamente quantificarsi in un terzo dell'intero lavoro.

³ EUCLIDES, 1883-1916.

⁴ ENRIQUES, F., 1912-1935.

⁵ HEATH, T. L. 1956.

⁶ cfr. ad es. TANNERY, P.; VAILATI, G.; VERONESE, ; AMALDI, U.; ENRIQUES, F., 1912.

⁷ RUSSO, 1992, 1997, 1998.

⁸ INCARDONA, 1996.

⁹ TOTH, 1997.

tano a interpretare l'opera come un *modello matematico* del fenomeno della visione e tendono ad inserire Euclide nel contesto di una più ampia evoluzione delle idee scientifiche e filosofiche all'inizio del terzo secolo. Appare invece infondata l'ipotesi, per altro solo fugacemente accennata dall'autrice, secondo cui Euclide si potrebbe senz'altro assimilare all'alveo della filosofia stoica.

Infine il volume di Imre Thot¹⁰ ci interessa soprattutto perché porta l'attenzione su alcuni passi di Aristotele che evidenziano l'esistenza, già prima di Euclide, di un problema relativo alle parallele e la consapevolezza nello stagirita dell'indecidibilità logica del problema stesso.

Il presente lavoro propone un riesame del testo euclideo anche alla luce della storia critica dell'ultimo secolo, con particolare riferimento ai lavori sopra citati, e delle più recenti acquisizioni sulla società e la cultura ellenistica del terzo secolo A.C. Le conclusioni a cui riteniamo di poter pervenire sembrano rispondere ad alcuni degli interrogativi fino ad ora rimasti aperti.

2. Platonismo e aristotelismo.

La data degli Elementi viene posta intorno al 300 a.C. ed è oggettivamente difficile una datazione più precisa. Se però restiamo alle indicazioni di Proclo¹¹, che a questo proposito costituisce tutt'ora la principale fonte, dobbiamo ritenere che egli abbia scritto le sue opere nei primi decenni del terzo secolo. In realtà, la contemporaneità con Tolomeo I impone solo che Euclide sia presente e attivo prima del 283 a.C., data della morte di Tolomeo, ma poco ci dice di più preciso sull'arco di tempo durante il quale la sua opera fu elaborata e perciò, in linea di principio, molte ipotesi sarebbero possibili. Tutto però lascia presumere che *gli Elementi* e le altre principali opere note di Euclide siano state scritte nell'ambito del Museo e della Biblioteca di Alessandria. Per vastità e per organicità, ma anche per loro caratteri intrinseci che vedremo più avanti, tali opere sembrano pienamente conciliarsi con una grande impresa organizzata, quale fu certamente la scuola di Alessandria, in una fase storica in cui, come la critica unanimemente riconosce, le scienze si distaccano dalla filosofia e questa tende a sua volta ad abbandonare i grandi sistemi per seguire vie più pragmatiche ed empiriste¹². Per quanto riguarda il preteso platonismo di Euclide, asserito con tanta sicurezza da Proclo, questi è al riguardo un interprete parziale e inattendibile: le sue decise posizioni neoplatoniche, possono averlo indotto a supporre, e poi anche a trovare, evidenze di pensiero platonico in quello che era cer-

¹⁰ E' difficile rendere conto in poco spazio del contenuto di un'ampia monografia tendente ad una reinterpretazione del pensiero aristotelico alla luce delle geometrie non euclidee.

¹¹ "...Non molto più giovane di loro [Ermotico di Colofonie e Filippo di Medma] è Euclide; egli raccolse gli Elementi, ne ordinò in sistema molti di Eudosso, ne perfezionò molti di Teeteto, e ridusse a dimostrazioni inconfutabili quelli che i suoi predecessori avevano poco rigorosamente dimostrato. Visse al tempo del primo Tolomeo, perché Archimede, che visse subito dopo Tolomeo primo, cita Euclide; e anche si racconta che Tolomeo gli chiese una volta se non ci fosse una via più breve degli Elementi per apprendere la geometria; ed egli rispose che per la geometria, non esistevano vie fatte per i re. Euclide era dunque più giovane dei discepoli di Platone, ma più anziano di Eratostene e di Archimede che erano fra loro contemporanei, come afferma in qualche luogo Eratostene. Per le idee Euclide era platonico e aveva molto familiare questa filosofia, tanto che si propose come scopo finale di tutta la raccolta degli Elementi la costruzione delle figure chiamate platoniche." (PROCLO, Comm. Eucl., II, 68).

¹² Dice ad es. Geymonat: "Il museo di Alessandria rappresenta il trionfo della cultura specializzata: la cosiddetta cultura ellenistica. Il campo del sapere viene suddiviso in reparti ben circoscritti. Non si creano più sistemi filosofici generali né vaste sintesi, ma si svolgono rigorose ricerche su problemi particolari, affrontandoli uno per volta. L'antica figura del filosofo è sostituita da quella del dotto; e tutto il tipo di insegnamento tende proprio a formare degli studiosi sempre più ricchi di seria e sicura dottrina. Questa tendenza verso il particolare spiega l'interesse per l'indagine scientifica e, ancor più, il metodo della specializzazione adottato dalla scienza ellenistica. Mentre i grandi filosofi trattavano, con pari disinvoltura e competenza, di fisica e di matematica, come faceva, per esempio, Platone, o di logica e scienze naturali, come Aristotele e Teofrasto, gli scienziati dell'età ellenistica non si intendono di filosofia, e, a loro volta, i filosofi trascurano l'indagine scientifica, per restringersi alle proprie competenze specifiche" (GEYMONAT, p. 284). Ed Enriques: "Più tardi, colla diffusione della civiltà greca susseguente alle conquiste macedoni, sorsero altri centri splendidi di cultura, come Rodi, Pergamo, e soprattutto Alessandria d'Egitto. In questo periodo ellenistico la scienza si scioglie dalla filosofia (che sembra ormai dominata esclusivamente da interessi morali) e tocca ad una florida maturità: alla quale tuttavia succede assai presto, se anche lentamente, la decadenza" (ENRIQUES 1925, I, p. 15).

tamente considerato il più grande matematico di tutti i tempi¹³. Di certo era difficile trovare evidenze contrarie proprio per la mancanza di esplicite affermazioni e commenti che ne potessero rivelare le opzioni filosofiche. Qualcuno, nel XIX sec. ha affermato che “*Per Proclo Euclide ebbe la grande fortuna di non essere smentito né dagli oracoli Caldei, né dalle scuole Pitagoriche vecchie e nuove*”¹⁴. Ma come si dirà più avanti si può ben ipotizzare che l’apparente asetticità degli scritti euclidei e di altre opere scientifiche coeve, non sia dovuta alla fortuna ma ad una precisa scelta; ed è possibile che una tale ipotesi fornisca una chiave di lettura della scienza alessandrina, ed allo stesso tempo una spiegazione della sopravvivenza di vari testi scientifici, mentre risultano perduti tutti i testi originali coevi che sottendono una visione del mondo.¹⁵

Naturalmente quanto è stato detto fino ad ora non conferma ma neppure esclude un’adesione o una vicinanza, di Euclide al platonismo. E così la critica moderna, pur non prendendo in seria considerazione l’affermazione di Proclo¹⁶, non sempre esclude un’ascendente di origine platonica sulla geometria di Euclide, ma anzi utilizza talvolta categorie proprie del fondatore dell’Accademia nell’analisi degli Elementi. Sull’argomento Heath si esprime come segue:

*“He may himself have been a Platonist, but this does not follow from the statements of Proclus on the subject [...] It is evident that it was only an idea of Proclus own to infer that Euclid was a Platonist because his Elements end with the investigation of the five regular solids, since a later passage shows him hard put to it to reconcile the view that the construction of the five regular solids was the end and aim of the Elements with the obvious fact that they were intended to supply a foundation for the study of geometry in general”*¹⁷.

Enriques osserva invece che

*“Platone (Resp. 527) sembra disdegnare l’uso dei postulati, dove critica la «terminologia troppo ridicola e misera» dei geometri, i quali, come si trattasse di scopo pratico, parlano sempre di quadrare, prolungare, o aggiungere, mentre tutta la scienza si coltiva allo scopo di conoscere”*¹⁸.

Ed in effetti da un platonista ci si potrebbe aspettare almeno una diversa formulazione dei primi tre postulati che presentano un carattere chiaramente costruttivo! Drastico è invece Neugebauer che nega qualunque influenza di Platone sui matematici in generale:

“Mi pare evidente che il ruolo di Platone sia stato enormemente esagerato. I suoi contributi diretti alla conoscenza matematica sono stati manifestamente nulli. Il fatto che, per breve tempo, matematici del livello di Eudosso siano appartenuti alla sua cerchia non è una prova

¹³ L’affermazione che il fine degli Elementi sia costituito dai corpi platonici (i cinque poliedri regolari), non ha comunque alcun fondamento, perché sebbene essi costituiscano l’ultimo argomento dell’opera, vi sono parti rilevanti di questa che non trovano alcuna applicazione ai poliedri regolari. La stessa affermazione diventa poi risibile se si pensa che i principi e i teoremi degli Elementi sono adoperati in opere successive, in particolare nell’*Optica*, e questa, assieme alle nozioni degli *Elementi*, è applicata ai *Phaenomena*. Se usassimo il criterio di Proclo dovremmo concluderne invece che gli elementi hanno come finalità quella di “*salvare i fenomeni*” (V. più avanti, sez 4).

¹⁴ “*Martin says rather neatly, «Pour Proclus, les Éléments d’Euclide ont l’heureuse chance de n’être contredits ni par les Oracles chaldaïques, ni par les spéculations des pythagoriciens anciens et nouveaux....».*” (HEATH, 1956, p. 30, nota 2).

¹⁵ Gli autori preferiscono, per il momento, sospendere il giudizio circa le ragioni e le dinamiche che porteranno, con la crisi e la successiva fine dei regni ellenistici, ad una profonda inversione di tendenza nella visione del mondo; ma è abbastanza evidente che nei secoli immediatamente successivi le filosofie di questo periodo furono fortemente avversate o incomprese.

¹⁶ Non mancano tuttavia, anche oggi, esposizioni, per lo più divulgative o didattiche, che in assenza di ulteriori precisazioni, possono avvalorare la tesi di Proclo o una datazione anteriore al 300 a.c. Ci limitiamo a citare un esempio in edizione elettronica e quindi recentissimo. Alla voce Euclid (Marinus Taisbak, in *ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA*, on line edition, Britannica.com Inc., 1999-2001) si legge: “*For his subject matter Euclid doubtless drew upon all his predecessors, but it is clear that the whole design of his work was his own, culminating in the construction of the five regular solids, now known as the Platonic solids*”. Se poi andiamo indietro di alcuni decenni troviamo esempi anche più significativi. E’ il caso ad es. di Popper che in una nota (V. Popper, I, p. 339, nota 9) propone un’Euclide interprete ed esecutore di un progetto di geometrizzazione ideato da Platone.

¹⁷ HEATH, T. L. 1, vol I, cap. 1.

¹⁸ ENRIQUES, , 1912, I, p. 42.

dell'influenza di Platone sulla ricerca matematica. [...] Le dottrine di Platone hanno, senza dubbio, esercitato una grande influenza sull'interpretazione moderna della scienza greca [sottolineatura degli autori]. Ma se gli studiosi moderni avessero dedicato a Galeno o a Tolomeo altrettanta attenzione che a Platone e ai suoi seguaci, sarebbero giunti a risultati alquanto diversi e non avrebbero inventato il mito della spiccata attitudine del cosiddetto spirito greco a sviluppare teorie scientifiche senza far ricorso a esperimenti o a verifiche empiriche”¹⁹.

Rimane da esaminare un punto, a nostro avviso molto importante, che è quello concernente le prime sette definizioni (ΟΓΟΙ). Queste, potrebbero, secondo alcuni, avvalorare la tesi platonista.

In realtà si tratta di enunciazioni, non sempre chiare, come la 4 e la 7, in contrasto con l'estrema linearità e limpidezza dell'opera in ogni altra sua parte²⁰, e comunque mai utilizzate nel corso delle dimostrazioni. I tentativi di spiegare tali definizioni, e in particolare la 4 e la 7 già citate, lungi dal fare chiarezza, pongono più problemi di quanti non se ne vogliano risolvere²¹.

Su questo punto una risposta può venire dal già citato lavoro di Russo²², che attraverso un'ampia analisi dei testi e delle fonti, giunge alla conclusione che gli ΟΓΟΙ 1-7 sarebbero stati formulati probabilmente da Erone e, comunque, aggiunti in epoca successiva, presumibilmente per motivi didattici, o comunque di chiarificazione. Si tratta indubbiamente di un'ipotesi che, al di là dei riscontri storiografici, si dimostra ampiamente chiarificatrice rispetto ad uno dei problemi interpretativi di Euclide che altrimenti continuerebbe ad apparire tra i più oscuri. Accogliamo quindi questa tesi; dobbiamo però dire che la questione non si può considerare definitivamente chiusa; infatti se Euclide ha lasciato indefiniti gli enti geometrici fondamentali, perché avrebbe dovuto definire i concetti di unità e di numero (ΟΓΟΙ 1 e 2 del Libro VII)? Si prospetta quindi la possibilità di un discorso più complessivo che comprenda anche queste “definizioni”. D'altronde anche in questo caso vi sono forti indizi di possibili aggiunte o modifiche nel corso del tempo: la definizione ad es. dei numeri *disparimenti dispari*²³ non solo è per sé stessa inutile, ma non compare nell'edizione teoniana²⁴.

Infine vogliamo solo sfiorare la questione già citata²⁵ degli ΟΓΟΙ 8 e 9, su cui pure sono sorti numerosi interrogativi²⁶. In primo luogo non si comprende la ragione per cui Euclide debba dare una definizione generale di angolo, comprendente anche gli angoli curvi. Vero è che prima di Euclide tali angoli furono considerati, ma negli *Elementi* la definizione più generale rimane fine a sé stessa perché mai usata nel seguito²⁷, così come non sono mai usate le definizioni 1-7. Si può quindi ipotizzare che anche gli ΟΓΟΙ 8 e 9, almeno nella forma in cui appaiono nel testo di Heiberg, siano stati scritti in epoca posteriore. In questo caso però ci si può chiedere se l'angolo fosse trattato originariamente come termine non definito o se Euclide avesse posto un'unica definizione (e quale) per l'angolo rettilineo. L'attuale definizione, per altro, non definisce nulla perché si limita a porre una relazione di sinonimia tra le parole *angolo* e *inclinazione*. Non è possibile, in questa sede, dare una risposta ad un quesito che richiederebbe una ricerca specifica ma in ogni caso la questione merita di essere approfondita.

A questo punto possiamo affermare, senza ulteriori esitazioni, che negli *Elementi* non si riscontra nulla che possa avvalorare una diretta discendenza del pensiero di Euclide da quello di Platone, né una tale influenza è documentabile storicamente. Al contrario vi sono molte ragioni per ritenere Euclide abbastanza lontano da una concezione platonista della scienza.

¹⁹ NEUGEBAUER, pp. 183-184.

²⁰ Un'eccezione è forse costituita dalle successive def. 8 e 9. Ma di questo si dirà più avanti.

²¹ V ad es. ENRIQUES, 1912, I, p. 30 ; HEATH, 1956, pp. 155-176.

²² RUSSO, 1998.

²³ EUCLIDES, *Elem.* VII, def. 10.

²⁴ V. ENRIQUES, 1912-1935, II, p. 170.

²⁵ V. nota 20.

²⁶ V. ad es. ENRIQUES, 1932, I, pp. 32-35 e HEATH, 1956, I, pp. 176-178.

²⁷ Con l'unica eccezione della Prop. III 16, dove l'angolo curvilineo appare nell'ultima parte del teorema, ma in modo inessenziale per i teoremi successivi nell'ordine dimostrativo; non è quindi arbitrario pensare che si tratti di una successiva interpolazione.

Più complessa è la questione del rapporto tra Euclide e Aristotele. Mentre, infatti, molti aspetti della teoria aristotelica della conoscenza sono presenti, in forma e misura diversa, in tutta la storia della scienza, da Euclide ai nostri giorni²⁸, d'altra parte è difficile oggi capire cosa Euclide conoscesse della dottrina aristotelica a noi nota²⁹. E' lecito tuttavia supporre che il pensiero aristotelico, qualunque ne sia stata la via di diffusione, abbia avuto un ruolo di primo piano nella formazione della scuola di Alessandria, anche per il prestigio di cui doveva godere presso i successori di Alessandro. E se è vero che il *fare i conti con Aristotele* sia stato da allora un'imprescindibile necessità di tutto il pensiero scientifico, è anche vero allora che non si tratta più di stabilire se Euclide fosse aristotelico, ma quanto della sua opera presentasse elementi di novità e di originalità rispetto al passato e in particolare rispetto al filosofo stagirita.

A tale scopo cercheremo innanzitutto di individuare quali caratteri dell'opera di Euclide si mantengono sicuramente nel solco della scienza aristotelica. Questi caratteri si possono subito identificare con la struttura deduttiva, che se pure doveva già essersi in qualche modo delineata con i precedenti geometri, tuttavia è con Aristotele che viene chiaramente teorizzata e sistematizzata. A questa struttura deduttiva allude sicuramente il nome Elementi³⁰ (*Stoixeia*).

Per Aristotele *elementi* sono le componenti indivisibili di qualcosa a cui sono immanenti³¹. Nel caso della Geometria Euclidea si può pensare che gli *elementi* a cui allude il titolo siano (1) Componenti degli oggetti geometrici, e cioè solidi, superfici o linee, con esclusione dei punti che non possono avere componenti. Oppure (2) Componenti di dimostrazioni.

La prima interpretazione è stata data da diversi commentatori, per i quali punti, linee, e superfici sarebbero i componenti elementari a cui si riferirebbe il titolo. Questa interpretazione però non regge per alcune ragioni. Già nella concezione Platonica, gli enti matematici, in quanto idee, sono per sé stessi indivisibili. Anche nella concezione Aristotelica, però, tutti gli oggetti della geometria, tranne il punto, sono sì divisibili quanto a grandezza ma non lo sono quanto a nozione e quanto a genere o a specie³². Così una superficie divide un corpo che ha la forma di un solido geometrico, ma non è elemento costituente di quest'ultimo, né come nozione, né come genere o specie (o come idea per i sostenitori di Platone). Allo stesso modo un punto è il limite o la divisione di una linea ma non ne è

²⁸ E' vero che la nascita della scienza moderna viene considerata come il frutto dell'opposizione galileiana alla tradizione aristotelica, ma è anche vero che in ogni fase e in ogni passaggio del suo sviluppo, il pensiero scientifico si è dovuto confrontare con i grandi temi posti da Aristotele. Tra questi temi ricordiamo in particolare la distinzione tra filosofia e scienze particolari e la definizione di conoscenza scientifica che da allora rimane indissolubilmente legata al concetto di causa. Per Aristotele conoscere (in maniera non sofistica) significa infatti sapere "*la causa per cui una cosa è e non potrebbe non essere*". Non rientra quindi nella conoscenza scientifica la semplice descrizione di cose o di fatti o la presenza di legami *contingenti*. La ricerca delle cause generali di una classe di fenomeni è da allora alla base dello sviluppo di tutte le scienze antiche (post-aristoteliche e moderne, anche se il concetto di causa perde, con Hume, ogni connotazione metafisica (David Hume: Trattato sulla natura umana). Quando la *causa finale*, venne espunta dalle scienze moderne, rimase in esse solo il concetto di causa efficiente con la conseguente visione deterministica della natura. Sembrava allora che la scienza moderna, rifiutando il finalismo, prendesse, in modo chiaro e definitivo, le distanze da Aristotele almeno su questo punto. Ma la nascita della cibernetica ha forzato l'attenzione degli scienziati sui *comportamenti finalistici*, simulati fino ad ora con meccanismi di retroazione (feed-back), e anche se questi sono visti in realtà come meccanismi deterministici che dei *comportamenti finalistici* simulano solo gli effetti, non mancano concezioni diverse che possono rimettere in gioco l'intera questione (In proposito v. ad es. H. VON FOERSTER: *La verità è l'invenzione di un bugiardo*, Melteni, Roma, 2001).

²⁹ Notoriamente gli scritti di Aristotele cosiddetti *esoterici* o *acromatici*, e cioè quasi tutte le opere che noi oggi conosciamo, prima perduti e poi ritrovati, furono portati a Roma da Silla; furono quindi ordinati e pubblicati da Andronico di Rodi nel I sec. a.C. Euclide quindi non può aver letto, di Aristotele, le stesse opere che noi conosciamo e su cui nei secoli si è fondata tutta l'esegesi del pensiero aristotelico, è però verosimile che egli fosse a conoscenza, per altra via, dell'insegnamento di Aristotele.

³⁰ Non importa se il titolo è stato assegnato dallo stesso Euclide o da altri. E' più importante notare che, come ci informa Proclo, già prima di Euclide, con questo nome erano stati indicati altri trattati di geometria, in particolare quello scritto da Ippocrate di Chio (470-410).

³¹ Aristotele articola questa definizione in più casi e sottocasi, ma tutti rientranti nello stesso concetto generale che presuppone (1) essere parti di qualcosa, (2) essere indivisibili. (V. *Metaph.* 1014 a, 26 -1014 b, 15.)

³² V. *Metaph.* 1016b.

elemento³³. Del resto considerare i punti come elementi costitutivi di una figura geometrica comporterebbe l'ammissione dell'infinito in atto, non solo escluso esplicitamente da Aristotele ma, cosa per noi ancora più importante, accuratamente evitato da Euclide.

Inoltre bisogna dire che le nozioni di punto, linea, superficie non sono il vero oggetto degli *Elementi* di Euclide, in cui si sviluppa tutta la geometria piana, quella solida, la teoria dei numeri e la teoria delle proporzioni mentre sugli oggetti fondamentali si dice ben poco (nulla se gli *στοιχεῖα* 1-7 si ritengono apocrifi).

La seconda interpretazione (sempre seguendo Aristotele), riguarderebbe i principi primi della geometria, cioè i postulati e, al più le nozioni comuni. Questi infatti sono, per Aristotele, i costituenti indivisibili delle dimostrazioni. Come vedremo questa concezione trova difficoltà se si ritiene che più enunciati tra loro equivalenti possano essere indifferentemente scelti per svolgere la funzione di postulato. Ma come diremo meglio più avanti non sembra essere questa la posizione di Aristotele, il quale presuppone una fondamentale asimmetria tra ciò che è dimostrato (più complesso) e ciò che serve a dimostrarlo (più semplice), per arrivare così ad una base di indimostrabili: solo questi sarebbero quindi elementi. Come ancora vedremo, almeno il quinto postulato, non sembra soddisfare a questa condizione.

Ma c'è una terza ipotesi: che Euclide usi la parola *στοιχεῖα* seguendo non Aristotele ma una precedente tradizione in cui “*elementi*” significa sì “*le parti che costituiscono una dimostrazione*” ma senza la pretesa che fossero indimostrabili. In questo modo, la maggior parte dei teoremi, oltre ai postulati, sarebbero elementi di altri teoremi nella cui dimostrazione sono utilizzati. Quest'ipotesi ben giustificherebbe la scelta del termine come titolo di un'opera che si caratterizza proprio per una struttura ramificata secondo una ben precisa relazione d'ordine definibile come *A è elemento di B*.

Quest'ipotesi appare più appropriata se si tiene conto che nella tradizione greca, ma anche in Aristotele, una dimostrazione era vista come una decomposizione nelle proposizioni più semplici utilizzate per dimostrare. Il fatto che già prima di Euclide siano stati scritti *Elementi*, avvalora questa interpretazione, perché nella tradizione greca le prime dimostrazioni devono aver riguardato le proposizioni più complesse ed importanti, quelle cioè sulle grandezze e i relativi rapporti (uguaglianze, similitudini, teorema di Pitagora, ecc...) mentre le dimostrazioni venivano fondate su proposizioni più semplici nei cui confronti non si nutrivano dubbi di sorta. Il graduale affinamento dell'analisi critica dovrebbe poi aver indotto ad una maggiore cautela e ad una minore fiducia anche nei confronti di proposizioni semplici, fino al prodursi di quella catena induttiva che, secondo Aristotele, dovrebbe condurre a delle proposizioni così semplici da non potere essere ulteriormente scomposte e, d'altronde, per sé stesse autoevidenti.

Leggiamo a questo proposito in Enriques:

*“... nell'opera d' Euclide... infatti appaiono ai primi posti teoremi - come quelli sull'eguaglianza dei triangoli - che non possono appartenere ad un periodo primitivo dello sviluppo geometrico perché non hanno significato di per se stessi, ricevendolo soltanto come principi od anelli di una catena che fa capo a proprietà geometriche veramente espressive: tali la somma degli angoli del triangolo e la relazione (pitagorica) fra i quadrati dei lati del triangolo rettangolo, i due fuochi cui tende l'ordinamento del primo libro”*³⁴.

³³ Aristotele definisce la superficie come limite o divisione di un solido, la linea come limite o divisione di una superficie e il punto come limite o divisione di una linea. Ad es: “...quando i corpi sono posti a contatto oppure sono divisi, nel momento in cui si toccano, si forma una sola superficie e, nel momento in cui si dividono, se ne formano due. Di conseguenza, quando i corpi sono riuniti, le due superfici non esistono più e risultano annientate; quando, invece, i corpi sono separati, esistono le due superfici che prima non esistevano [...]. Infatti, tutte queste cose [punti, linee e superfici] sono, nello stesso modo, o limiti o divisioni” (Metaph, 1002a, 39 – 102b, 10). Queste entità non possono però esistere, per Aristotele, separate dai corpi, e solo la nostra mente è in grado di considerarle separatamente e in maniera indipendente da essi. Così ad es.: “Si è dunque dimostrato a sufficienza che gli enti matematici non sono sostanze in più alto grado dei corpi, e che, rispetto ai sensibili, non hanno una anteriorità nell'ordine della nozione e, infine, che non possono in alcun modo esistere separatamente” (Metaph. 1077b, 12-15) e “Così le scienze matematiche non saranno scienze di cose sensibili, ma non saranno neppure scienze di altri oggetti separati dai sensibili” (Ibid. 1078a, 3-5)

³⁴ ENRIQUES, F., *L'evoluzione ecc...*, 1912, p. 4.

L'ordine deduttivo è dunque un sicuro elemento di continuità con il pensiero aristotelico, ma in parte anche con la tradizione della geometria greca, almeno a partire da Ippocrate di Chio³⁵. E non è certamente facile distinguere i due aspetti, anche perché lo stesso Aristotele utilizza ampiamente le strutture logiche già consolidate nell'ambito degli studi matematici, come mattoni per comporre il suo sistema filosofico. Questa continuità con la tradizione precedente è chiaramente implicita nel passo di Proclo in cui, coerentemente con le nostre conclusioni, viene spiegato il significato della parola "elementi":

*"...Ma ancora, il termine «elemento» si può usare in due sensi, come dice Menecmo: secondo il primo, ciò che dimostra è elemento di ciò che è dimostrato, così come in Euclide la prima proposizione è elemento della seconda, e la quarta della quinta ..."*³⁶

E' interessante il riferimento a Menecmo perché prova come sicuramente il termine, già prima di Euclide venisse usato proprio con il significato che si è detto. In ciò che segue cercheremo di analizzare quelli che potrebbero essere, con un alto grado di attendibilità, i caratteri originali della geometria di Euclide.

3. La scienza ellenistica

Un problema tutt'altro che risolto è quello relativo al ruolo che le scienze particolari ebbero in età ellenistica e particolarmente dal III al II sec. A.C. Che dopo il culmine della civiltà alessandrina, e precisamente a partire dalla seconda metà del II secolo A.C., inizi una fase di decadenza, è nozione comune ampiamente condivisa, mentre ancora problematiche appaiono la portata e l'estensione dell'impresa scientifica e le ragioni, oltre che il momento, per cui questo sviluppo si sarebbe interrotto. Molto accreditata è la tesi secondo cui la scienza ellenistica sarebbe giunta alle soglie di una rivoluzione scientifica, ma senza mai varcarla sebbene ve ne fossero (in tutto o in parte) le premesse teoriche. A questo proposito la letteratura è particolarmente vasta; ci basterà citare solo qualche esempio. Il primo è di Ludovico Geymonat che così si esprime:

"Di fronte alle prime vittoriose affermazioni di tale metodo [applicazione alla tecnica di principi scientifici], diventato oggi la base principale della civiltà tecnica moderna, c'è da chiedersi per quale motivo esso non abbia avuto nell'antichità maggiori sviluppi, e sia rimasto invece circoscritto a qualche caso isolato [...]. È un problema assai complesso, che in forma generale può venire formulato così: per qual motivo non si sviluppò, nel mondo antico, nemmeno un abbozzo di civiltà meccanica, mentre indubbiamente ve ne erano, sia pure in misura limitata, le prime premesse teoriche? [...]. La causa [...] va probabilmente cercata nella stessa struttura sociale del mondo greco-latino, il quale non sentiva il bisogno di inventare nuove macchine, avendo già a propria disposizione -sufficientemente a buon mercato - la «macchina naturale» della schiavitù. Ricordiamo a tal proposito che Marco Terenzio Varrone, descrivendo gli strumenti con i quali si lavora la terra, riferisce testualmente che «alcuni li dividono in tre categorie: strumenti parlanti, strumenti semiparlanti e strumenti muti. I primi sono gli schiavi, i secondi i buoi, e gli ultimi gli strumenti inanimati»³⁷.

Il secondo esempio che vogliamo citare è tratto da Federigo Enriques e Giorgio de Santillana i quali affermano:

³⁵ Si ricorda che secondo Proclo l'uso del termine *Elementi*, risalirebbe almeno ad Ippocrate di Chio (470-410 a.c.). V. Proclo, *Comm. Eucl. II. IV*, 66.

³⁶ PROCLO, *Comm.*, II, VII, 72.

³⁷ GEYMONAT, 1973, p.300. E' da osservare come Geymonat utilizzi in questo brano due criteri che riteniamo discutibili: un riferimento generico a un mondo *greco-latino*, senza ulteriori precisazioni spazio temporali, e il ricorso ad una fonte poco pertinente. Sebbene infatti Terenzio Varrone non sia del tutto fuori dall'arco temporale considerato, egli apparteneva ad un ambito culturale prettamente latino e romano, che tra il II e il I sec. a.c. si poneva ancora rispetto al mondo ellenistico in termini di conquista e quindi di alterità. Ma su questo tema si tornerà più avanti.

“Ma chi voglia comprendere i motivi di questa superba fioritura [lo straordinario clima culturale che si è sviluppato attorno al museo di Alessandria] è tratto a guardare, oltre l'ambiente esterno, le condizioni intime del lavoro degli studiosi: come abbiamo detto dimenticate le pretese universalistiche, il pensiero si circoscrive ora entro campi di ricerca precisi e sulla base di semplici postulati riesce a rispondere a problemi determinati. Così il distacco dalla filosofia sembra una liberazione della scienza che, proprio per aver rinunciato a conoscere la natura delle cose, acquista consapevolezza del suo reale oggetto e forza di attingere i più importanti risultati positivi. In pari tempo i larghi mezzi di studio, i più frequenti contatti degli studiosi riuniti nel Museo, e la pratica dell'insegnamento che disciplina insieme maestri e scolari, concorrono al formarsi d'una scuola nel senso moderno: non più scuola filosofica che riceve impulso dall'idea metafisica d'un Capo, ma scuola scientifica in cui intelligenze diverse accomunano i loro sforzi, creando e conservando la tradizione del metodo. Nondimeno è facile immaginare che questi motivi mal possano bastare per lungo tempo a mantenere il progresso della scienza, se l'interesse dei problemi non si riaccenda per una sempre viva visione filosofica, e il lavoro della classe ristretta degli studiosi non tragga alimento da una soggiacente cultura del popolo. In tali condizioni non può sorprendere che i fiori rapidamente sbocciati del genio scientifico vengano presto ad appassire”³⁸.

Sullo stesso tema, il seguente passo di Ludwig Edelstein ci sembra particolarmente significativo:

*“Dal IX secolo in poi, la grande maggioranza degli studiosi ha sostenuto che la scienza antica e quella moderna sono mondi separati. Se invece si leggono i testi raccolti in questo **Source book**³⁹ non si può non essere d'accordo con i curatori del volume, secondo i quali è un errore datare la nascita delle scienze naturali al Seicento e considerare i Greci dediti alla «mera speculazione». Nella matematica, nell'astronomia e geografia matematica, nella fisica, nella chimica e tecnologia chimica, nella geologia e meteorologia nella biologia, nella medicina, nella psicologia fisiologica, i Greci svilupparono e seguirono metodi che, se non li raggiungono, si avvicinano però molto agli standard della scienza moderna.[...] Quanto ci viene presentato non è ancora scienza moderna. Cionondimeno il legame tra le indagini antiche e quelle moderne è evidente[...]. Questa verità viene negata spesso ancor oggi, ma le testimonianze qui raccolte dovrebbero definire la questione una volta per tutte”⁴⁰.*

E più avanti

“Un pregiudizio duro a morire è che la scienza antica non abbia condotto ad applicazioni tecnologiche. Tuttavia, contrariamente alle affermazioni più volte ripetute e sulle quali si fondano generalizzazioni come quelle di Spengler, i Greci non furono ostili alla tecnologia. Platone biasima invero i «corruttori e distruttori della pura supremazia della geometria che in tal modo abbandona le cose incorporee del pensiero astratto per scendere alle cose sensibili servendosi per di più di oggetti che esigono una fatica così meschina e manuale». Ma Platone non è tutta l'Antichità: Archita, Eudosso, Menecmo costruirono strumenti e macchine. Aristotele ammirava i giocattoli meccanici, Aristosseno apprezzava i particolari tecnici. Sebbene Plutarco affermi che Archimede non mise per iscritto le proprie invenzioni a causa del suo «spirito superiore» della sua «anima profonda» vale a dire delle sue tendenze platoniche, resta pur vero che questo «Briareo geometra» come lo chiamarono i Romani applicò le sue conoscenze a fini pratici. L'elenco delle sue invenzioni è impressionante. Gemino, tra gli altri, considerava la meccanica una branca di quella parte della matematica che si occupa delle cose percepite con i sensi ...”⁴¹.

Ma è lo stesso Edelstein ad avvertire:

“La scienza moderna e la scienza antica non sono dunque diametralmente opposte. Mi affretto comunque ad aggiungere che una tale asserzione è valida solo se si è disposti a fare quello che

³⁸ ENRIQUES, SANTILLANA, 1937, p. 148.

³⁹ L'articolo in questione era stato scritto come introduzione a COEN, M. R., 1948.

⁴⁰ EDELSTEIN, pp. 92-93.

⁴¹ Ibid., pp. 99-100.

hanno fatto gli autori di questo «Source book» e cioè a selezionare come documentazione solo quel «materiale» che oggigiorno verrebbe generalmente considerato scientifico nel metodo, basato cioè, in via di principio, o sulla matematica o sulla verifica empirica. In altre parole, l'impressione che la scienza antica abbia un carattere moderno si acquista a prezzo di ignorare od omettere tutte le prove in favore del contrario»⁴².

Ammettendo dunque che le cose stiano esattamente come tratteggiate, pur con diverse sfumature, due grandi problemi si pongono.

1. Perché, pur in presenza di premesse teoriche sufficienti non si sarebbe sviluppata quella civiltà scientifico-tecnologica che verrà avviata solo nella nostra era? Questa domanda ovviamente non sussiste per chi, come Russo⁴³ ritiene che una siffatta civiltà avrebbe visto almeno l'avvio.
2. Perché l'iniziale progresso della civiltà ellenistica si arrestò in brevissimo tempo per declinare con grande rapidità?

Le risposte sono ovviamente diverse. Dice a questo proposito Edelstein:

“L'argomento più comunemente proposto e difeso nelle storie della scienza antica è che in una società schiavista il lavoro era a buon mercato, per cui nell'Antichità un progresso tecnico non si rendeva necessario. Una tale ipersemplificazione non mi sembra più giustificata perché, come hanno dimostrato gli studi degli ultimi decenni, non si può definire l'economia antica una semplice economia schiavistica. Soprattutto nelle arti e nei mestieri, il lavoro libero continuò a occupare un proprio ruolo. Oltre agli schiavi, nell'età classica, si impiegavano come artigiani meteci e cittadini”⁴⁴.

Dopo aver criticato le posizioni fondate in modo esclusivo su valutazioni economicistiche, Edelstein continua, in serrata opposizione con Benjamin Farrington⁴⁵, a confutare le due tesi fondamentali di quest'ultimo, e cioè che il mancato sviluppo scientifico nell'antichità sarebbe dovuto essenzialmente a due fattori: 1) Il rifiuto della tecnologia; 2) L'intervento censorio della politica.

Le argomentazioni di Edelstein sono serrate, fondate su dati storicamente validi, e non sembrano lasciare spazio a obiezioni significative. Ma nel cercare poi di rispondere alle stesse domande, egli ritiene di individuare le cause che hanno frenato lo sviluppo scientifico-tecnologico nel carattere individuale e privato della ricerca e nella mancanza di un'impresa scientifica organizzata. Per dimostrarlo utilizza dati e fonti che provengono o dal periodo classico o da quello successivo greco-romano, con esclusione del periodo alessandrino: unico in tutta l'antichità in cui la ricerca scientifica è sicuramente organizzata e gode di cospicui finanziamenti. La Biblioteca e il museo di Alessandria, le analoghe istituzioni, sia pur minori, esistenti altrove, le realizzazioni di Archimede, sono certamente noti e riconosciuti, ma vengono considerati poco influenti in quanto “eccezioni”.

E' evidente che ancora una volta c'è qui il rifiuto di ipotizzare una cesura e un arresto improvviso che può essersi verificato in epoca successiva, impedendo il proseguimento di uno sviluppo sicuramente molto più avanzato di quanto non si ritenesse alcuni decenni fa; un rifiuto che si riscontra ancora nella maggioranza dei ricercatori moderni. Riteniamo di poter vedere in questo rifiuto un'idea positivista di progresso, inteso come un'inarrestabile e continuo *andare avanti*. Secondo questa idea, se una qualche forma di progresso scientifico e tecnologico avesse avuto inizio, esso avrebbe dovuto proseguire senza mai fermarsi. E' proprio in contrapposizione a questo che si inserisce il lavoro di Lucio Russo. Egli sostiene infatti che la rivoluzione scientifica di cui parla si sarebbe svolta nel breve arco di tempo caratterizzato dalla potenza economica, militare, politica e culturale dell'Egitto Tolemaico e degli altri regni ellenistici, per poi decadere e divenire *indecifrabile* a seguito della conquista romana. In tal modo viene superata la maggior parte delle possibili obiezioni, perché tutte le risultanze contrarie di cui si dispone riguardano quasi sempre periodi precedenti o

⁴² Ibid., p. 95.

⁴³ Russo, 1997. V. anche in Introduzione.

⁴⁴ EDELSTEIN, p. 100.

⁴⁵ FARRINGTON, 1944.

successivi, o sono comunque estranee all'elaborazione culturale che si svolge nell'ambito alessandrino.

4. L'interpretazione della scienza e il *swzein ta fainomena*.

La definizione di un problema così ampio, non solo presenta grandi difficoltà per la scarsità del materiale documentario originale⁴⁶, ma rischia di dar luogo a dispute “vuote” circa il loro oggetto. Ciò perché le diverse tesi sostenute si riferiscono spesso a concezioni differenti della scienza. Già più sopra abbiamo riportato un passo di Edelstein in cui questa difficoltà viene a delinarsi in modo abbastanza evidente (v. citazione riferita alla nota 42) se si mette in relazione con quanto lo stesso Edelstein dice più avanti:

“I curatori del libro [V. nota 39], come molti altri studiosi dell'Antichità, sembrano propensi a classificare come «magia, superstizione e religione», «le teorie oggi notoriamente false o ridicole». Parlano di una pseudo-scienza come l' «astrologia e simili» «reperibile negli scritti di scienziati greci seri come Aristotele e Tolomeo» (p. VIII); accennano all'«intrusione dell'occulto» osservabile anche in scritti scientifici moderni da Keplero a Eddington (p. IX). Nella scienza antica però l'astrologia, la teoria degli umori, la scala musicale matematica di Platone non sono «intrusioni». Teorie come queste, che la critica moderna ripudia, rappresentano di fatto la parte più cospicua del materiale conservato. Per i Greci esse erano altrettanto scientifiche di quelle che gli scienziati moderni considerano accettabili”⁴⁷.

E' tuttavia molto improbabile che questo giudizio possa adattarsi agli scienziati del periodo Alessandrino che vanno da Euclide ad Archimede e Apollonio, anche perché come già detto (v. nota 46), nei loro testi scientifici non c'è riferimento a credenze e visioni del mondo. Il riferimento a Tolomeo, vissuto nel II sec. d.C. non aggiunge invece nulla a quanto già detto. Tuttavia il brano citato chiarisce in modo efficace il problema a cui vogliamo fare riferimento e che rende spesso tra loro non comparabili le valutazioni sulla scienza antica, proprio per l'*incommensurabilità* di ciò che viene inteso con la parola “scienza”⁴⁸.

Uno dei dibattiti più accesi sull'interpretazione della scienza greca in generale, e non quindi in modo specifico di quella alessandrina, riguarda il motto *swzein ta fainomena* (salvare i fenomeni)⁴⁹, utilizzato in particolare da Pierre Duhem⁵⁰ per reinterpretare la parte più significativa della scienza antica in chiave strumentalista⁵¹. Da parte nostra concordiamo con gran parte delle critiche

⁴⁶ Quasi tutti i testi filosofici e letterari prodotti nel terzo secolo a.C. sono andati perduti, mentre i testi scientifici di cui pur rimangono alcuni dei più importanti, sono generalmente privi di commento e non si pronunciano sulle opzioni filosofiche che possono averne costituito la premessa.

⁴⁷ EDELSTEIN, p. 95.

⁴⁸ E' appena il caso di ricordare come la gran parte della critica post-popperiana (tra cui T. Kuhn, P. Feyerabend, ecc...) ha condotto ad una visione sempre più sfumata e mobile dei confini tra scienza e non scienza. In questa prospettiva, anche le concezioni che nella storia si sono presentate come intrise di elementi di metafisica o anche di “occulto” e di “magico”, non potrebbero essere immediatamente e acriticamente liquidate come “superstizione” e “non scienza”.

⁴⁹ L'esigenza di “salvare i fenomeni” nelle spiegazioni cosmologiche sarebbe stata espressa per la prima volta da Platone, ma non certamente con il significato proposto da Duhem che appare in evidente contrasto con la dottrina platonica.

⁵⁰ DUHEM, 1908. V. anche DUHEM 1956-73.

⁵¹ Con la parola *strumentalismo* si indica un atteggiamento che vede la teoria scientifica come uno “strumento” artificialmente costruito per inserire i dati osservativi in un sistema coerente, con lo scopo di consentire deduzioni predittive sui fenomeni futuri da controllare sperimentalmente. Allo strumentalismo si oppone l'atteggiamento *realistico* che tende a considerare le teorie scientifiche come effettive spiegazioni della realtà. Su questo punto, com'è noto, si giocò molto il processo a Galileo, in quanto il Cardinale Bellarmino era ben disposto ad accettare una descrizione “*puramente matematica*” del sistema cosmologico in termini di eliocentrismo, purché venisse ripudiata la convinzione che “*veramente il sole sta immobile al centro e la terra si muove*”, mentre Galileo era ben fermo nella sua posizione realista. Duhem reinterpreta l'intera storia della fisica e soprattutto della cosmologia nei termini del motto *salvare i fenomeni*, inteso proprio nel senso di un sostanziale e, spesso, radicale strumentalismo. Giunge così alla conclusione che fossero *giuste* le posizioni di Bellarmino e sbagliate quelle realiste di Galileo. In questa sede a noi però interessa il fatto che

rivolte a Duhem quando, forzando il senso delle parole o travisando una traduzione, attribuisce intenti *strumentalistici* non dimostrabili ai “più rappresentativi” degli scienziati greci antichi ed in modo particolare a Tolomeo e a Proclo. Tuttavia, è lo stesso Goffrey Lloyd⁵², che pure ha messo in luce molti degli errori storiografici di Duhem, a farci diffidare delle facili generalizzazioni. Dice infatti nell’introduzione del suo saggio “Salvare i fenomeni”:

“In primo luogo, il pluralismo della scienza antica va nuovamente sottolineato. [...] gli scopi e le assunzioni degli scienziati antichi nel campo dell' astronomia, dell'acustica, dell'ottica, e così via, sono diversi, e non solo da disciplina a disciplina, ma anche all'interno di ciascuna di esse. Così, all'interno della stessa astronomia sono diversi i tipi di studio intrapresi o i tipi di trattati composti. Accanto alla tradizione rappresentata dalla costruzione di modelli astronomici matematici ad opera di Ipparco e Tolomeo, c'è, da un lato, un'opera di ricerca più descrittiva e, dall' altro, un' opera di carattere più strettamente matematico [...]. Ho citato lo studio strettamente geometrico di Aristarco «Sulle dimensioni e le distanze del sole e della luna»: tale tradizione comprende anche gli «Sferica» di Teodosio, lo scritto «sulle sfere mobili» di Autolico e i «Phenomena» di Euclide”⁵³.

E poi nella conclusione dello stesso saggio, pur affermando che:

“là dove in effetti disponiamo di una qualche documentazione, [...] essa sovente contraddice la linea interpretativa sostenuta così energicamente da Duhem e poi ripresa da altri. [...]E] Nelle dichiarazioni metodologiche di Gemino, Teone e Proclo e nell'effettiva pratica scientifica di Tolomeo troviamo elementi a conforto dell'opposto punto [di vista]”⁵⁴.

premette tuttavia che:

“... per molte delle più importanti figure della storia dell'astronomia greca noi semplicemente non siamo in condizione di pronunciarci in modo definitivo sulle loro concezioni o sullo status delle varie ipotesi da loro utilizzate o sulla questione più generale della natura dell' astronomia e del suo rapporto con la fisica”⁵⁵.

Ora quest’ultima osservazione dispiega tutto il suo significato se si riflette sulla circostanza che proprio per Euclide e per altri scienziati del periodo considerato, la mancanza di notizie non è dovuta, come in altri casi, alla perdita delle loro opere, ma al fatto che essi volutamente hanno omesso ogni pronunciamento in merito⁵⁶. Riprenderemo tra poco questo punto che a noi sembra essenziale proprio perché non riteniamo che l’apparente asetticità degli scritti scientifici di Euclide e di altri scienziati coevi possa essere dovuta al caso oppure ad un’assenza di convinzioni; né casuale può essere il fatto che, al contrario, da lì a qualche secolo, tutti coloro che si occuperanno di matematica e di scienze esatte, avvertiranno l’esigenza di accompagnare il testo scientifico con ampi commenti e giustificazioni sulla scelta delle premesse. E’ quantomeno il segno di un cambiamento concettuale, o, per dirla con Kuhn, di un “*riorientamento gestaltico*”⁵⁷ rispetto ai metodi e agli oggetti del sapere scientifico.

Sempre a proposito delle diverse concezioni della scienza, bisogna poi dire che L. Russo nel volume citato⁵⁸ specifica in modo preciso ciò che intende con l’espressione *scienze esatte*, precisamente:

l’interpretazione strumentalista di Duhem si estende alla maggior parte delle elaborazioni scientifiche dell’antichità greca, comprendendo in ciò anche astronomi come Tolomeo.

⁵² V. ad es. LLOYD, 1993.

⁵³ Ibid. pag. 427.

⁵⁴ Ibid. pag. 470.

⁵⁵ Ibid. pag. 470.

⁵⁶ Tuttavia, come si dirà più avanti, i “Phaenomena” di Euclide non sono poi del tutto privi di indicazioni.

⁵⁷ La psicologia della forma (Gestalt) si serve di figure ambigue che in momenti diversi possono essere interpretate in modo diverso. Tipico è ad es. il caso delle figure geometriche che appaiono a volte concave, a volte convesse, a seconda della disposizione mentale dell’osservatore; disposizione che può mutare improvvisamente senza che apparentemente vi sia una ragione. Questa “mutabilità” di orientamento gestaltico, viene assunto da Kuhn quale metafora del mutare, a livello non soltanto individuale ma in ambiti culturali più vasti, di una più profonda e complessiva visione del mondo. (V. ad es. l’intervento di Kuhn in *Critica e crescita della conoscenza*, a cura di Imre Lakatos e Alan Musgrave, Feltrinelli, Milano, 1984).

⁵⁸ RUSSO, 1997.

“...costituita da teorie, quali la termodinamica, la geometria euclidea o il calcolo delle probabilità, con le seguenti caratteristiche essenziali:

1. Le affermazioni scientifiche non riguardano oggetti concreti, ma enti "teorici" specifici.[...].
2. La teoria ha una struttura rigorosamente deduttiva; è costituita cioè da pochi enunciati fondamentali («assiomi», «postulati» o «principi») sui propri enti caratteristici e da un metodo unitario e universalmente accettato per dedurre un numero illimitato di conseguenze. In altre parole la teoria fornisce metodi generali per risolvere un numero indeterminato di problemi. Tali problemi, enunciabili nell'ambito della struttura della teoria, sono in realtà "esercizi": problemi, cioè, sui quali vi è un accordo generale tra gli esperti sui metodi che possono essere usati per risolverli e per controllare la correttezza della soluzione. I metodi fondamentali sono la dimostrazione e il calcolo.
3. La «verità» delle affermazioni «scientifiche» è quindi in questo senso garantita. Le applicazioni al mondo reale sono basate su delle «regole di corrispondenza» tra gli enti della teoria e gli oggetti concreti»⁵⁹.

Non entriamo in una discussione su quelli che riteniamo essere i limiti di una definizione della scienza quale viene espressa da L. Russo⁶⁰, anche perché ai fini del presente lavoro, non crediamo sia necessaria una risposta completa alle tematiche fino ad ora poste, né riteniamo necessario che sia individuata una caratterizzazione generale della scienza Alessandrino-Tolemaica, di cui Euclide è partecipe solo per la fase iniziale. Ci sembra invece importante considerare alcuni dei caratteri originali di questo periodo e che non sarà più possibile cogliere nella fase più tarda dello stesso ellenismo, proprio perché le filosofie e le visioni del mondo che si affermano in questo secolo verranno, per molti aspetti ribaltate e rifiutate. Non bisogna però cadere nella tentazione di cercare una *visione del mondo* unitaria e tipicamente alessandrina, anzi è proprio questa mancanza di unitarietà che sembra essere il vero carattere del secolo ed è proprio qui che va cercata una chiave di lettura del carattere che le varie scienze vanno assumendo.

Nella complessa e variegata differenziazione dei punti di vista che si fronteggiano, spesso in aspra polemica tra loro, è d'obbligo fare riferimento a quelle che sono considerate le tre principali correnti del pensiero filosofico post-aristotelico: l'epicureismo, lo scetticismo e lo stoicismo. Siamo ben consapevoli come questa sia solo una semplificazione di comodo. Così non si può ignorare l'esistenza contemporanea ad esempio della scuola peripatetica, ma non sembra tuttavia che i seguaci immediati di Aristotele abbiano prodotto qualcosa di significativo per noi. E non si può non tenere conto delle differenziazioni, anche radicali, che dividono filosofi troppo facilmente omologati dall'assunzione dell'etichetta di *scettici*⁶¹, ecc...

Dovendo noi fare riferimento alle correnti filosofiche del terzo sec. a.C., in relazione ai rapporti che possono sussistere con la matematica e le scienze esatte, vogliamo qui restringere il discorso alla scuola stoica fondata da Zenone di Cizio ed agli scettici dell'Accademia, a partire da Arcesilao. Questa scelta è dovuta al fatto che ci sembra di particolare interesse lo scontro di idee tra queste due

⁵⁹ Ibid., p. 34.

⁶⁰ Non è questa la sede per esprimere le nostre posizioni sulla critica epistemologica che nel XX secolo seguì all'empirismo logico. Pensiamo sia utile esprimere soltanto qualche particolare considerazione sul caso specifico. Ci sembra che porre limiti molto rigidi a ciò che è legittimato a chiamarsi scienza (come fa Russo), mentre da un lato può essere utile in prima istanza, e può aiutare a separare tra loro cose troppo frettolosamente confuse, dall'altro rischia di costruire artificialmente cesure, così rigide da far perdere di vista parti significative della complessa vicenda storica e dello stesso valore della scienza. Per essere più espliciti vogliamo esemplificare. Un indubbio merito del libro di Russo con la sua definizione di *scienze esatte*, è quello di delimitare in modo preciso il problema della validazione delle fonti storiche. Infatti, mettendo un preciso limite spazio-temporale, pone fine a improprie generalizzazioni come quelle che abbiamo più volte citato. Di contro una rigida delimitazione, come quella che abbiamo visto, di ciò che è *scienza a buon diritto*, può escludere troppo drasticamente visioni e sistemi come quello aristotelico, che, se da un lato, con le sue pretese di assolutezza metafisica, costituisce di certo un ostacolo all'indagine empirica, dall'altro è stato ed è una base che continua a permeare di sé anche le più *positivistiche* regioni della scienza moderna e contemporanea (v. nota 28).

⁶¹ Ricordiamo come Arcesilao tenesse molto a puntualizzare un legame di discendenza con Platone, per distinguersi in modo netto da Pirrone e dallo scetticismo pirroniano.

scuole; scontro che nel corso della contrapposizione dialettica, prima tra Arcesilao e Zenone, più avanti tra Carneade e Crisippo, ha certamente prodotto una crescita di entrambe quanto a profondità di elaborazione⁶².

E' bene ancora ribadire quanto da noi già precedentemente accennato: che cioè non pensiamo di poter trovare diretti rapporti di adesione o filiazione, e ciò per una molteplicità di ragioni, sia di carattere cronologico, sia per la già più volte menzionata *asettività*, almeno apparente, dei testi scientifici laddove i testi filosofici coevi sono tutti perduti. Si tratta piuttosto di verificare, attraverso il riscontro con le diverse espressioni del pensiero coevo, quali ipotesi sulla scienza greca possono considerarsi in qualche modo compatibili con altri aspetti della cultura del tempo.

A noi basta rilevare come la fondazione dei regni ellenistici costituisca un elemento di forte novità in quanto:

1. La produzione culturale perde il suo carattere prettamente individuale, volontario e privatistico per diventare attività finanziata, organizzata e integrata nella struttura statale.
2. Tra scienza e tecnica vi sono interrelazioni non casuali, ma sicuramente richieste dalla stessa entità statale che finanzia la produzione e divulgazione della cultura. Non importa, per il momento, quanto estesa sia la loro importanza economica e se l'obiettivo prevalente sia di tipo militare.
3. Il mondo ellenistico è ormai così complesso e variegato che, in esso, non è più pensabile, neppure come obiettivo, una visione del mondo unificata. La *scienza*, intesa come complesso delle scienze particolari più o meno relazionabili con le *tekné*, possono allora sussistere e mantenere una propria specifica validità, solo a condizione di non prendere posizione sui temi "*dell'essere in quanto essere*" e di lasciare indecisa la questione della assoluta e definitiva "*verità*" delle stesse premesse scientifiche⁶³.

Se i primi due punti sembrano già abbastanza chiari e difficilmente confutabili, qualche puntualizzazione può essere utile sul punto 3.

Se da una parte è difficile sostenere un preciso interesse verso le scienze particolari da parte dei maggiori rappresentanti delle scuole filosofiche ellenistiche⁶⁴, non si può tuttavia negare che i nuovi termini in cui si pone il dibattito filosofico, mettendo in discussione il significato stesso della conoscenza, non può non avere conseguenze più o meno dirette sulle metodologie e sui fondamenti della ricerca scientifica. La netta distinzione, ad esempio, nell'ambito della scuola stoica, tra realtà e significato del discorso (*l'extōh*), pone in termini assolutamente nuovi il problema della conoscenza in generale e del sapere scientifico in particolare. Stoicismo ed Epicureismo concordano poi nell'assegnare all'esperienza del mondo fenomenico la sola fonte di conoscenza che ci è data, anche se soltanto la prima delle due scuole assegna un valore al metodo deduttivo.

Il problema più serio, però, dal punto di vista del valore che si vuole assegnare al sapere scientifico, sta nell'effettiva stabilità e oggettività della conoscenza possibile. E' qui il punto di reale e, apparentemente, insanabile contrasto tra stoici e accademici. Per gli stoici la *scienza* (*episthḗmh*), differisce dall'opinione (*doxa*) per il fatto di aver raggiunto una stabilità tale *da non poter essere ribaltata con il ragionamento*. Possiamo allora chiederci: perché specificano «con il ragionamento»? è possibile pensare che venisse considerata l'eventualità di modificare qualche conoscenza precedentemente ammessa per una via diversa dal ragionamento? Per esempio se una rappresentazione comprensiva (*xatá hptixh\fantasiá*) si presenta in seguito a nuove esperienze?

Tutte le interpretazioni date dalle fonti antiche e dalle ricerche esegetiche moderne, inducono a dare risposte negative. Dobbiamo però considerare che, seppure gli stoici antichi asserivano la possibilità di divenire "*saggi*" (cioè detentori di vera *episthḗmh*), tuttavia nessuno di essi si dichiarò saggio e

⁶² V. in particolare IOPPOLO, 1986.

⁶³ Sulla storia e sulla società ellenistica, nonché sull'organizzazione dell'impresa scientifica nell'Egitto Tolemaico, V. ad es. BERGTSON, 1989; BIANCHI BANDINELLI, 1977; FRASER, 1972; GULLINI, 1998, FLOWER. Per il pensiero filosofico nello stesso periodo, ed in particolare per la disputa tra stoici e accademici, V. ad es. GEIMONAT, 1973; IOPPOLO, 1996; ISNARDI PARENTE, 1994, 1999; LÉVI, 2002; CANFORA, 1995.

⁶⁴ V Saggio introduttivo in ISNARDI PARENTE, 1999.

quindi tale possibilità era da considerare un obiettivo ideale. C'è inoltre un punto che potrebbe forse generare qualche dubbio, e che comunque può mostrare come la gnoseologia stoica si presenti molto più complessa di quanto non sembri. Lo troviamo tra i frammenti di Galeno, l'autore che, proprio per la passionale veemenza con cui esprime la sua avversione per Crisippo, riporta, a testimonianza della propria obiettività, qualche brano integrale del filosofo stoico. Vediamo infatti che secondo Galeno⁶⁵

“[Crisippo] intraprende a dimostrare ciò che è giusto credere in base all'opinione [doxa] di testimonianze qualsiasi del volgo e non secondo la natura della cosa”⁶⁶.

Ciò ovviamente è di per sé poco credibile perché in netta contraddizione (almeno apparente) con il nucleo centrale della dottrina stoica e crisippea in particolare. Ma Galeno prosegue:

“Trascrivo qui le sue stesse espressioni, che sono pressappoco queste: «intorno a tali cose faremo ricerca similmente, partendo dalla comune opinione e dai discorsi che secondo questa si compiono» e con opinione comune Crisippo vuole intendere ciò che appare comunemente a tutti gli uomini; poi continuando dice: «essi sembrano da tutto ciò fin dall'inizio di preferenza esser condotti ad asserire che la nostra parte direttiva sta nel cuore». Trattando poi ancora di ciò scrive testualmente: «Mi sembra che i più siano generalmente portati ad affermare ciò, in quanto in certo modo si rendono conto che, in concomitanza con i loro moti psichici, si verifica qualcosa nel loro petto, e soprattutto nel luogo ove è posto il cuore ...»”⁶⁷

E così Galeno descrive polemicamente la difesa che Crisippo va costruendo alla sua tesi; ma più che l'argomento su cui si contende a noi interessa come il filosofo stoico attribuisca validità conoscitiva alle opinioni comuni, alla tradizione, al mito, all'allegoria (“...Dopo aver riempito tutto il libro di versi di Omero, Esiodo, Stesicoro, Empedocle, Orfeo,”⁶⁸). Sempre nella testimonianza di Galeno, troviamo però in un altro punto (sulla questione se il cuore sia la fonte dei nervi) l'ammissione da parte di Crisippo...di non conoscere *realmente* la questione perché inesperto di *dissezione*. Precisamente dice Galeno:

“[...]. Tuttavia rende tollerabile la sua opinione col dire modestamente che egli non presume di dire che il cuore è la fonte dei nervi o che conosce **veramente** ciò che si riferisce a questa questione, giacché si dichiara inesperto dell'arte della dissezione.”⁶⁹

Queste ultime affermazioni, che Galeno riporta come prova di una confessata incapacità e incompetenza da parte di Crisippo, possono essere interpretate invece come la consapevolezza che le stratificazioni culturali tramandate attraverso il linguaggio, la tradizione e il mito, contengono in sé un'immagine del mondo che possiede una sua iniziale validità, superabile soltanto attraverso una riorganizzazione del sapere fondato su esperienze specifiche e organizzate (in questo caso la dissezione)⁷⁰. Ed infatti, se Crisippo dichiara di *non sapere* come *realmente* stanno le cose, a che sarebbe diretta la lunga discussione su cui tanto si sofferma Galeno, se non all'interpretazione dei significati simbolici del mito e delle stratificazioni semantiche del linguaggio, come del resto ci conferma un altro passo di Crisippo riportato sempre da Galeno?⁷¹. In particolare proprio la frase di Crisippo “i-

⁶⁵ Il tema del contendere riguarda la localizzazione della “parte direttiva dell'anima” cioè, nel linguaggio antico, della localizzazione delle funzioni razionali. Qui ha poca importanza il fatto che Crisippo sostenga la tesi più retrograda, quella cioè secondo cui la sede stia nel cuore: ci interessano solo alcuni passaggi argomentativi.

⁶⁶ GALENO, *De Hippocr. et Ptat. plac.*, III, 1, p. 254 Müller = SVF II, 886. Cit in ISNARDI PARENTE 1999, p. 400.

⁶⁷ Ibid.

⁶⁸ Ibid., III, 4, p. 281, Müller = SVF II, 907. In ISNARDI PARENTE, p. 413.

⁶⁹ Ibid., I, 5-10, p. 138-145, Müller = SVF II, 897. In ISNARDI PARENTE, p. 407.

⁷⁰ Che la tradizione, così come il linguaggio e il mito, non possono essere per Crisippo criteri finale della verità, è chiaro da molti altri frammenti noti. In particolare ricordiamo che egli scrisse tra l'altro *contro l'opinione comune*.

⁷¹ “Dopo ciò, Crisippo [...] dice: «Tali sono le cose che si dicono di Atena [il mito che vuole Atena partorita dalla testa di Zeus dopo che questi ha inghiottito Metis], e l'allegoria che risulta da esse è un'altra. Per prima cosa si paragona Metis alla mente e all'arte del vivere; per opera di questa si devono, mandar giù e 'inghiottire' le arti, allo stesso modo che diciamo di mandar giù i discorsi altrui: è come dire di conseguenza che dobbiamo quasi trangugiarle e mandarle giù nel ventre. Dopo di ciò, è ragionevole che si partorisca quest'arte che abbiamo inghiottita, divenendo con ciò simili a una madre che genera; inoltre **noi partoriamo in noi i prodotti delle scienze ...»**” (Ibid., III, 8, p. 321, Müller = SVF II, 909. In ISNARDI PARENTE, p. 415).

noltre noi partoriamo in noi i prodotti delle scienze” sembra contrastare in modo radicale con le interpretazioni strettamente realistiche date da Galeno⁷². A maggior ragione non può sorprendere il fatto che anche Tolomeo fraintendesse il senso delle opere di Euclide, dando interpretazioni realistiche ad oggetti puramente matematici come i *raggi ottici*.

Questo ovviamente non dice nulla circa il possibile obiettivo, da parte degli stoici, di raggiungere comunque una verità ultima, come non è risolutivo circa i termini fondamentali della contrapposizione tra dogmatici (stoici) e accademici (scettici), controversia il cui nucleo fondamentale riguardava la possibilità o meno di raggiungere conoscenze stabili e oggettive. Tale possibilità viene ammessa dagli stoici, almeno in linea di principio, ma come risultato di un lungo processo di elaborazione intellettuale a partire dai dati dell’esperienza sensibile. E’ qui però essenziale il fatto che il dato sensoriale non è di per sé conoscenza, perché questa passa attraverso la creazione di oggetti concettuali o categorie di pensiero (*prol h̄yeij* o *koinai/ēhnoi ai*) che si esprimono, e forse in parte si identificano, con i modi del linguaggio. Sicché il *logos* diventa parte essenziale della conoscenza razionale il cui inizio sembra venisse posto intorno all’età di sette anni⁷³. Da parte sua la scuola scettica, che ebbe inizio quando Arcesilao divenne capo dell’Accademia, contestava, non già i procedimenti più o meno complessi con cui si ritiene di potere acquisire delle “*conoscenze*”, ma l’idea in sé che su qualcosa si potesse raggiungere comunque la certezza. Propugnavano quindi la necessità della sospensione del giudizio, ma non per ciò rifiutavano le forme “*pratiche*” di conoscenza, intese come acquisizioni provvisorie, sempre rivedibili e rivolte a qualche finalità (*tēknh*). E’ opinione prevalente, ma non unanime⁷⁴, che entrambe le scuole non guardassero con interesse alle scienze particolari, ma soltanto alle questioni etiche. A noi però interessa, e ciò appare come un dato di fatto, che il quadro complessivo fosse tutt’altro che incompatibile con uno sviluppo sempre più autonomo, e in qualche modo “*non realistico*” delle scienze particolari. Anzi si potrebbe dire che il terreno ideale per lo sviluppo delle idee scientifiche era quello fornito dalle dispute filosofiche sul valore della conoscenza, quali si presentavano soprattutto tra stoici e accademici. Un terreno nel quale la scienza poteva guadagnare autorevolezza assumendo nuove categorie logiche e di pensiero, quantomeno simili a quelle sviluppate dalla scuola stoica⁷⁵, ma anche sospendendo il giudizio, come volevano gli accademici, sull’effettività delle cose e sulla verità dei principi.

⁷² D’altronde tutte le testimonianze su Crisippo, ad un’attenta lettura, portano alla rappresentazione di un pensiero estremamente profondo, al di là, il più delle volte, di quanto non sia riuscito a intendere lo stesso testimone.

⁷³ “*Quella capacità di ragionare in virtù della quale siamo detti per l’appunto esseri ragionevoli, dicono che si forma in noi in base alle anticipazioni (prol h̄yeij) e giunge a perfezione intorno all’età di sette anni*” Aezio, *Plac.*, II, 1-4 Dox, Gr., pp. 400-401 =SVF II, 83, in ISNARDI PARENTE, p. 700. Notiamo solo fuggevolmente la quasi coincidenza di età, nella teoria di Jean Piagét, con il passaggio dall’intelligenza *pre-operatoria* a quella delle *operazioni materiali*. V. ad es. FLAVELL, J. H., *La mente dalla nascita all’adolescenza nel pensiero di J. Piagét*, Astrolabio, Roma, 1971.

⁷⁴ V. ad es. LÉVY.

⁷⁵ Per quanto riguarda la rivalutazione della logica stoica, non tutti concordano sul valore che essa poteva avere in relazione alle scienze. Isnardi Parenti, ad esempio ritiene che la logica di Crisippo costituisca, rispetto a quella aristotelica un ritorno alla tradizione del V secolo. Ciò in particolare perché il sillogismo crisippeo, a differenza di quello aristotelico, ha come oggetto l’individuo e non l’universale. Noi non siamo d’accordo e osserviamo che nelle dimostrazioni geometriche non veniva mai usata la forma del sillogismo aristotelico. I ragionamenti infatti si riferiscono sempre a oggetti singolari anche se supposti scelti in modo qualsiasi. Si dice ad es. *Il punto A...*, *il punto AB...*, *l’angolo ABC...*, ecc...; mai “tutti i punti sono...” o “tutte le rette sono...”, ecc...La generalizzazione è affidata a un successivo atto di pensiero in virtù dell’arbitrarietà con cui si intendono effettuate le scelte. Sillogismi del tipo “Tutti i triangoli sono poligoni, tutti i poligoni sono superfici, dunque tutti i triangoli sono superfici”, possono servire ad illustrare con esempi le forme sillogistiche aristoteliche, ma sono troppo banali per poter fare effettivamente della geometria. Se si volesse invece usare comunque un quantificatore universale (come vorrebbe Aristotele) nelle effettive dimostrazioni matematiche, ci si troverebbe necessariamente a dover fare i conti con l’infinito in atto. Si tratta in sintesi di quella problematica che, con lo sviluppo dell’analisi infinitesimale moderna, non è stato più possibile eludere e che ha portato alla teoria degli insiemi. In termini di logica formale, questo si ottiene aggiungendo al Modus Ponens la regola di Generalizzazione, che apponendo ad una variabile il quantificatore universale, generalizza l’enunciato singolare ad un’infinità in atto, laddove presumendo solo l’arbitrarietà della scelta (come nel caso di Euclide, ma anche di Cauchy), l’estensione diventa solo potenziale. In conclusione riteniamo importante, nell’evoluzione del pensiero matematico, la concezione aristotelica del

Abbiamo ritenuto di accennare a un dibattito filosofico che, pur essendo in gran parte posteriore ad Euclide, ci consente comunque di rimarcare come i problemi cui si è accennato non fossero estranei alla cultura greco-alessandrina e quanto complesso fosse il panorama delle idee.

5. Nozioni comuni e postulati

Un dato già per sé stesso significativo è il fatto che l'autenticità delle nozioni comuni sia stata messa, in tutto o in parte, in discussione. Prescindendo dalla riconosciuta inattendibilità di alcuni di essi, riteniamo interessante il dibattito a cui ha dato luogo un articolo di Tannery⁷⁶, con cui si sosteneva la non autenticità di tutte le nozioni comuni, che sarebbero state interpolate successivamente, e si formulava l'ipotesi che ad aggiungerli fosse stato Apollonio. Queste conclusioni sono state però respinte da Heath e da altri commentatori. Anche se non vi sono prove documentali certe, siamo propensi ad accettare la tesi prevalente, secondo cui sarebbero di Euclide almeno le prime tre (ma probabilmente di più). Qualunque sia la verità di fatto, tuttavia, ciò che riteniamo più interessante sono le argomentazioni prodotte dall'una e dall'altra parte.

A tale scopo riportiamo qui interamente quanto viene detto in proposito da Heath:

*“(1) Se Euclide avesse voluto distinguere, dice Tannery, tra principi comuni a tutte le scienze deduttive e principi specifici della geometria, certamente non avrebbe posto i principi comuni dopo e i postulati prima. (2) Se le nozioni comuni sono di Euclide, allora anche l'espressione che li designa dev'essere suo; perché deve avere usato un nome per distinguerli dai postulati, ma se avesse usato un altro nome come Assiomi, sarebbe difficile immaginare perché quel nome sarebbe stato poi cambiato con un altro meno appropriato. La parola *ἐννοία*, dice Tannery, non è mai stata usata per significare nozione nel senso di una proposizione, ma nel senso di nozione di qualche oggetto, né si trova in qualche senso tecnico in Platone o Aristotele. (3) Secondo le vedute di Tannery la formulazione delle Nozioni Comuni va datata al tempo di Apollonio, e fu ispirata alle sue opere che fanno riferimento agli Elementi (Noi sappiamo da Proclo che Apollonio tentò di verificare le Nozioni Comuni). Quest'idea, pensava Tannery, è confermata da una fortunata coincidenza fornita dall'occorrenza della parola *ἐννοία* in una nota di Proclo (p. 100, 6): “noi siamo d'accordo con Apollonio quando dice che abbiamo nozione (*ἐννοία*) di una linea solo quando ordiniamo le lunghezze di strade o muri da misurare.”*

*In replica all'argomento (1) secondo cui sarebbe innaturale mettere prima i postulati puramente geometrici e poi le Nozioni Comuni che non sono specifici della geometria, si può obiettare che sarebbe stato certamente una sistemazione ancora più goffa quella di dare le Definizioni separate dai Postulati, per la frapposizione delle Nozioni Comuni, quando esse sono connesse così da vicino con le Definizioni in ciò di cui postulano l'esistenza, vale a dire linee rette e cerchi. (2) Sebbene è vero che *ἐννοία* in Platone e Aristotele è nozione di un oggetto, non di un fatto o proposizione, generalmente ci sono esempi in Aristotele dove significa nozione di un fatto: così nell'*Eth. Nic. IX. 1171a32* egli parla di “la nozione (o la coscienza) che gli amici sono d'accordo” (*ἡ ἐννοία τοῦ συναλγεῖν τοὺς φίλους*) e di nuovo, b 14, “la nozione (o la coscienza) che si sono rimessi alla fortuna”. E' vero che Platone ed Aristotele non usano la parole in senso tecnico, ma non vi era apparentemente, al tempo di Aristotele, alcun termine tecnico e fisso per quello che noi chiamiamo «assiomi», perché egli parla di essi in vario modo come «i così detti assiomi in matematica», «i così detti assiomi comuni», «i comuni (cose)» (*τα/κοίνα*) ed anche «le opinioni comuni» (*κοίνας δόξαι*). Non vedo*

ragionamento sillogistico come strumento formale separato dalle questioni di verità e realtà. Se si considera però la forma effettiva del sillogismo, allora quello crisippeo ci appare più idoneo di quello aristotelico.

⁷⁶ TANNERY, 1884.

*quindi ragione perché Euclide non dovesse dare egli stesso un senso tecnico a «Nozioni Comuni» che è almeno un deciso miglioramento rispetto a «opinioni comuni».*⁷⁷

Abbiamo riportato questo lungo brano perché da esso emergono alcuni elementi significativi per la nostra analisi. Ma vogliamo prima riportare il giudizio in proposito di Enriques che afferma:

*“La distinzione tra i postulati e quelle che più avanti sono designate come «nozioni comuni» (gli «assiomi» dei pitagorici) viene illustrata da Aristotele e dal commento di Proclo secondo diversi punti di vista [...]»*⁷⁸

e più avanti:

*“Ma è notevole che Aristotele non parli mai di nozioni comuni, usando il termine pitagorico di assiomi ἀξιωματά (dignità); anzi la parola ἔννοια non sembra trovarsi in significato tecnico presso PLATONE o ARISTOTELE. bensì soltanto più tardi presso gli Stoici. Però, le deduzioni che qualcuno (TANNERY) ha voluto trarre da questa circostanza, mettendo in dubbio l'autenticità delle nozioni euclidee, cadono di fronte all'osservazione che la parola ἔννοια s'incontra in un frammento di DEMOCRITO. E poiché fra le opere perdute di questi vi è un trattato di geometria che per la disposizione ricorda gli Elementi di Euclide, è lecito argomentare che il testo di Democrito potesse recare appunto questa denominazione degli assiomi e che da esso EUCLIDE l'abbia ripreso.”*⁷⁹

Le argomentazioni di Heath possono effettivamente vanificare quelle di Tannery, e concordiamo con lui quando dice *“Non vedo quindi ragione perché Euclide non dovesse dare egli stesso un senso tecnico a «Nozioni Comuni» “.* Già! Perché non dovrebbe? E lo diciamo al di là dell'uso che Aristotele fa in contesti diversi di espressioni come *ta/koina* e *koina i doxai*, senza per altro avvertire l'esigenza di fissare un termine tecnico. Quello che invece ci sembra accomunare i tre autori citati è il fatto che tutti si muovono su un assunto implicito comune, che è poi presente in quasi tutta la letteratura critica sugli *Elementi* e che si può così riassumere: *“La geometria di Euclide è costruita nell'ambito della filosofia Platonico-Aristotelica; dunque se qualcosa in essa non è coerente con Platone o Aristotele, e solo in questo caso, allora o è un difetto o si tratta di un'interpolazione successiva”*. Ora è chiaro che un'assunzione così formulata è in linea di principio non falsificabile perché ogni evidenza contraria potrebbe portare esclusivamente a scorporare qualcosa dal corpus euclideo ma non a falsificare l'assunto. Tuttavia potrebbe essere parzialmente e condizionatamente accettabile se fossimo in presenza di un quadro di riferimento stabile, coerente e non lacunoso. Questo però non è il nostro caso, sia per ciò che riguarda specificamente Euclide, della cui vita nulla si sa, né più in generale per ciò che riguarda il contesto culturale, scientifico e filosofico del terzo secolo A.C., durante il quale, per altro, non si sa neppure quali fossero le opere aristoteliche note e circolanti⁸⁰.

Tornando al passo citato di Enriques, osserviamo come, nonostante si rilevi l'uso della parola εἰρηνοια negli stoici (e Zenone di Cizio è contemporaneo di Euclide), si preferisce far ricorso ad ipotesi alquanto vaghe e capziose, anche per la distanza temporale che separa Euclide da Democrito. In ambito stoico non solo ricorre la parola εἰρηνοια ma ritroviamo l'intera espressione *koina i eἰρηνοια*, che ad es. Isnardi Parente ritiene di potere identificare (almeno da alcune citazioni di Arriano e Plutarco) con *prol h'yeij* (traducibile con “idea” ma anche “schema” o “immagine menta-

⁷⁷ EATH, 1956, p. 221.

⁷⁸ ENRIQUES, F., 1912, p42. Ricordiamo che Aristotele in realtà distingue tra i principi fondamentali (non dimostrabili), quelli che sono alla base di singole scienze particolari da quelli che hanno invece carattere generale. Egli però non pare che utilizzi una terminologia tecnica, come del resto è rilevato sopra da Heath. Ma ciò che ci sembra importante rilevare è che tale distinzione, funzionale alla classificazione delle scienze, non istituisce, in Aristotele, una alcuna differenziazione di carattere gnoseologico. Ai principi primi si perviene, per lo stagirita, a seguito di un processo induttivo fino ad una non meglio chiarita intuizione; essi quindi, per essere tali, devono essere tutti altrettanto chiari, evidenti e veri. La differenza tra principi primi comuni e postulati non è dunque nel loro status ontologico ma nel diverso grado di universalità.

⁷⁹ Ib., pp. 47-48.

⁸⁰ V nota 29.

le". Oggi parleremmo forse di strutture cognitive. (Vedi anche sez. 4, nota 73). Vogliamo subito osservare come il concetto stoico espresso da *koinai/ eἰηνοιαί*, dal punto di vista estensionale potrebbe parzialmente corrispondere a quello che Aristotele designa talvolta con *axiomata*, ma sul piano concettuale ne differisce profondamente. Da qui non riteniamo però che si possano trarre conclusioni affrettate perché, come già detto nell'introduzione, non crediamo a legami di interdipendenza diretta tra geometria euclidea e pensiero stoico⁸¹. Riteniamo, in ogni caso, che debba essere considerata con molta attenzione un'ipotesi di ricollocazione dell'opera di Euclide dall'ambito strettamente Platonico-Aristotelico ad una più matura fase di evoluzione del pensiero scientifico e filosofico; una fase cioè, in cui la teoria della conoscenza, già delineata da Aristotele come risultato di un processo induttivo-deduttivo, si va arricchendo da un lato attraverso il lavoro organizzato e ormai sempre più autonomo degli scienziati, dall'altro attraverso la disputa filosofica che al tempo di Euclide si presenta già molto accesa e variegata e costituisce indubbiamente uno sfondo su cui l'opera dello scienziato si colloca.

Vari elementi ci sembrano indicare una coerenza con le nostre ipotesi. Intanto va osservato che *Postulati* e *Nozioni Comuni* negli Elementi di Euclide differiscono non solo per essere raggruppati separatamente, ma anche per il diverso modo di enunciazione. Solo per i postulati (*aitḥmata*), infatti, viene usata inizialmente la parola *h)thsqw*⁸² che da Heath viene tradotta con "*Let the following be postulated*" e da Enriques più letteralmente con "*Si domanda*" mentre in altri casi viene addirittura ignorata⁸³. Se ammettiamo allora che le *Nozioni Comuni* siano autentiche, nel senso che almeno alcune di esse siano state introdotte già nel testo originale, allora la presenza dell'incipit *h)thsqw* nei *Postulati* ma non nelle *Nozioni Comuni*, deve pur costituire una differenza tra queste due classi di principi primi. E questa differenza non può limitarsi alla distinzione aristotelica tra *principi generali* e *principi della scienza specifica*, ma deve riferirsi piuttosto a qualcosa che coinvolge lo stato di verità o qualsivoglia altro criterio di accettabilità. Ora, dal momento che la domanda dialettica è nient'altro che una richiesta di assenso, il diverso modo di porre le due classi di principi primi è come se l'assenso del lettore si ritenesse scontato per le *Nozioni Comuni*, mentre per i *Postulati* si richiedesse una convenzione, un accordo o un'accettazione ipotetica⁸⁴.

Ma al di là di questo indizio, vi sono motivi più profondi per far pensare che in Euclide le questioni della verità dei postulati si ponga in modo diverso rispetto ad Aristotele.

Affronteremo nella prossima sezione la questione più significativa sotto questo aspetto, e cioè quella delle parallele. Ora vogliamo invece ricordare che Euclide, oltre agli elementi, scrisse anche altre opere e tra queste sono da considerare in modo particolare l'Optica, proprio perché rispecchiano la

⁸¹ L'accostamento diretto di Euclide a certi aspetti della gnoseologia stoica potrebbe costituire una suggestione molto forte e affascinante. Al di là però delle difficoltà che potrebbero emergere da una analisi più attenta, vi è un dato storico e cronologico ineludibile. Infatti gli aspetti più interessanti del pensiero stoico in relazione alla teoria della conoscenza sembrano essere quelli che si vanno delineando con Crisippo, non in modo casuale, ma nel corso e sotto la spinta della controversia con l'Accademia (V. JOPPOLO). Ora essendo Crisippo nato nel 281, non è cronologicamente possibile che abbia esercitato influenze sullo scienziato alessandrino, attivo certamente prima che egli nascesse. Non può essere escluso invece che le nuove forme di pensiero che si andavano affermando nella scienza potessero influenzare il dibattito filosofico: ci sembrerebbe anzi poco credibile che ciò non fosse avvenuto.

⁸² *H)thsqw*: Forma imperativa del verbo *aitew* (domandare), quindi letteralmente «domanda» nel senso di comando. Nella tradizione dialettica della filosofia greca le domande venivano poste all'interlocutore prima di iniziare un ragionamento deduttivo ed erano sostanzialmente una richiesta di assenso su delle proposizioni, che una volta accettate diventavano le premesse del ragionamento. Lo stesso Aristotele usa talvolta il termine *domanda* con il significato di premessa di un sillogismo. È chiaro da ciò che l'intento dell'incipit è quello di costituire una premessa sillogistica, ma non ne segue automaticamente che esso abbia un valore ipotetico nel senso di sospensione del giudizio sulla verità. È per ciò che il confronto con le nozioni comuni, può assumere significato in questo senso.

⁸³ V. ad es. TRUDEAU.

⁸⁴ Ovviamente tutto questo cadrebbe se, in accordo con Tannery, si dimostrasse la non autenticità di *tutte* le nozioni comuni, che si dovrebbero allora supporre interpolate in epoca successiva, ed in questo caso si potrebbe riconsiderare una possibile origine stoica della loro denominazione. Ma l'idea di Tannery che si possano attribuire ad Apollonio, al di là delle ragioni prodotte da Heath, è improponibile, allo stato delle conoscenze, perché solo più tardi, con l'inaridirsi della produzione scientifica, sembra iniziata la consuetudine dei commenti e delle interpolazioni in opere altrui.

stessa struttura ipotetico-deduttiva degli Elementi. Anche qui l'enunciazione dei principi fondamentali (*Postulati*) inizia con una forma ipotetica, sebbene in questo caso il termine usato come incipit sia diverso⁸⁵. Ma ciò che qui è più significativo sta nei contenuti stessi dei postulati, in modo particolare per quanto riguarda i postulati 1, 3 e 4 che così vengono formulati:

1. *Sia posto dunque che i raggi⁸⁶ condotti dall'occhio siano linee rette che hanno tra loro distanza qualche crescente.*

.....
3. *e che siano visibili le cose a cui giungono raggi.*

4. *e che non siano visibili le cose a cui non giungano raggi.*

E' chiaro qui come il criterio della verità e dell'autoevidenza prescritto da Aristotele per l'accettazione delle arché sia del tutto inapplicabile, e qualora lo si volesse adottare porterebbe solo al rifiuto della teoria, cosa per altro che è storicamente avvenuta⁸⁷. Ed infatti, anche senza dare ai raggi un'interpretazione realistica e considerandoli solo come entità geometriche, sarebbe difficile trovare giustificazioni alla scelta di un modello discreto (i raggi hanno tra loro distanza) considerando solo gli assiomi in sé stessi, né si comprenderebbero le ragioni del terzo e quarto postulato se non se ne analizzano le conseguenze in congiunzione col primo. Le cose cambiano, invece, se come criterio di validazione si assume non più quello della verità dei principi, ma quello della corrispondenza delle conseguenze con i fenomeni osservabili. Che le cose stiano così, appare di una straordinaria chiarezza quando si leggono i teoremi nelle cui dimostrazioni vengono adoperati i postulati suddetti. Ed infatti li ritroviamo nelle dimostrazioni del teorema 2 (Oggetti più vicini sono visti con maggiore risoluzione) e del teorema 3 (per ogni oggetto c'è una distanza oltre la quale non è più visto).

Come si vede qui non solo viene meno l'autoevidenza e quindi il criterio della verità per l'accettazione dei postulati, ma il criterio stesso di validazione diventa un criterio *a posteriori* spostandosi dalle premesse alle conseguenze.

Né vanno trascurati a questo riguardo i *Phaenomena*, che pur avendo uno stile discorsivo, presentano sotto l'aspetto che stiamo esaminando, un interesse notevole, proprio perché, come si è già detto, si fondano su un'ipotesi iniziale di matematizzazione che tra tutte le formulazioni ipotetiche di Euclide, è la sola ad essere stata giustificata esplicitamente in un modo che rivela chiaramente l'intento di *salvare i fenomeni*.

6. La questione delle parallele.

A proposito del quinto postulato citiamo da Heath:

*“We know from Aristotle that up to his time the theory of parallels had not been put on a scientific basis (Anal. Prior. II, 16, 65a 4): there was apparently some **petitio principii** lurking in it. It seems therefore clear that Euclid was the first to apply the bold remedy of laying down the indispensable principle of the theory in the form of an indemonstrable Postulate”⁸⁸.*

Vedremo perché a nostro avviso la teoria delle parallele non poteva trovare una sistemazione coerente all'interno della concezione Aristotelica dei principi indimostrabili, né, a maggior ragione in una filosofia platonista. Vedremo ancora come da qui possa discendere una chiave di lettura per una vicenda durata due millenni. Ora però dobbiamo analizzare quanto viene detto in proposito da Imre

⁸⁵ ὑποκεισθω = *sia posto* [a fondamento].

⁸⁶ Nell'edizione inglese del presente lavoro il termine è tradotto con la parola *radius* che ha significato geometrico (ad es. raggio del cerchio) e si distingue dalla parola *ray* che viene usata per indicare i raggi di luce e che in questo caso darebbe all'enunciato un'interpretazione realistica. Noi riteniamo che i raggi vadano qui intesi come linee rette geometriche. In italiano, come già in greco e in latino non è possibile questa differenziazione terminologica, e ciò, nella storia, ha dato luogo ad evidenti equivoci.

⁸⁷ Storicamente è stata rifiutata (ad es. Da Tolomeo come da Leonardo d Vinci), in virtù di un'interpretazione realistica dei “raggi che escono dall'occhio” (V. ad es. INCARDONA).

⁸⁸ HEATH, 1931, p. 358.

Toth⁸⁹ nel volume che abbiamo già citato in introduzione. All'inizio del suo lavoro Toth richiama lo stesso passo di Aristotele citato poco sopra da Heath e dice:

*“L'interpretazione di un noto passo degli Analitici primi, II 16, 65a 4-7, perviene al risultato che questa arché può essere solo un enunciato equivalente o anche identico al famoso assioma delle parallele.”*⁹⁰

Questo passo (di Thot) richiede esso stesso qualche chiarimento. Il brano citato di Aristotele di cui Thot non dà una traduzione, né precisa quale sia l'interpretazione a cui allude, è infatti il seguente:

- ἄλλοι ποιοῦσιν οἱ (ταῖ) παραλή οἱ ὀρθοῖ ἀποδείκναι τὰ ἀνακρούσιν γὰρ ἀποτοῖ ἐαυτοῦ τοιαῦτα ἀμπαρόντων ἀ(ὀρθοῖ) οἱ ἴσῃ τε ἀποδείκναι μὴ οὐδὲν τῶν παραλή οἱ ὄν.-

Di esso vi sono diverse traduzioni abbastanza discordanti. Citiamo per prima la traduzione italiana di G. Colli che così si esprime:

*“Ed è proprio questo l'errore commesso da coloro che ritengono di tracciare delle rette parallele: essi infatti non si accorgono di assumere delle premesse tali, da non poter essere dimostrate, a meno che le rette non si presuppongano come parallele”*⁹¹.

Si tratta di una traduzione ridondante, che tenta di fornire già un'interpretazione del testo, ma di cui non si comprende bene il significato in relazione a ciò che sappiamo sul problema delle parallele. Dobbiamo premettere a questo punto il contesto in cui si trova il passo di Aristotele: il filosofo stagirita aveva appena illustrato l'inconsistenza dei ragionamenti circolari mediante i quali si pretende di dimostrare A mediante B quando B è stato dimostrato a partire da C e questo a sua volta da A; il passo citato serviva appunto da esemplificazione di questi *falsi ragionamenti*. Sembra chiaro, a questo punto, che l'espressione *“tracciare le parallele”* si riferisca a qualche costruzione geometrica della parallela per un punto ad una retta data e, conseguentemente, a qualche proposizione che dichiara le due rette essere *“effettivamente parallele”*. Toth presume, a quanto pare, che la proposizione a cui Aristotele allude, sia il teorema che Euclide pone come ventinovesima proposizione (o altro equivalente), la prima cioè che negli *Elementi* euclidei viene dimostrata con l'uso del quinto postulato. Se così fosse, allora effettivamente per dimostrarlo occorrerebbe un principio primo (arché) equivalente al quinto postulato. Ma che senso ha, in tal caso, dire che bisogna supporre già che le rette tracciate siano parallele? Sappiamo che per dimostrare l'effettivo parallelismo tra due rette tracciate in modo che angoli corrispondenti siano uguali, non occorre la ventinovesima proposizione, ma solo la ventottesima, la cui dimostrazione non richiede il quinto postulato. Una semplice costruzione della parallela alla retta r per un punto P si ottiene costruendo prima per P la perpendicolare t ad r (Elem. I, prop. 12) e poi ancora per P la perpendicolare s a t (Elem. I, prop. 11). Per la proposizione 28 si ha infine che r ed s sono parallele. La ventinovesima proposizione, invece, invertendo la prop. 28, consente di dimostrare l'unicità della parallela. In questa prospettiva, il passo di Aristotele, nella versione di Colli sopra citata, non sembra assumere un senso ragionevole. Una traduzione rigorosamente letterale del brano potrebbe essere:

“Ciò fanno coloro che credono di tracciare (o disegnare) rette parallele, infatti senza accorgersene assumono ciò che non è possibile dimostrare se le parallele non esistono”.

In questa versione, che per altro è confortata da altre note traduzioni⁹², il passo assume un significato più coerente; infatti la proposizione 28, che consente di riconoscere come parallela la retta co-

⁸⁹ TOTH 1997.

⁹⁰ Thot, 200, p.69. L'arché a cui Toth si riferisce, come specifica egli stesso nella stessa pagina, è il principio primo da cui dovrebbe derivare il cosiddetto *teorema delle parallele*, ventinovesima proposizione degli Elementi.

⁹¹ Aristotele, Organon, cura di Giorgio Colli, Adelphi, Milano, 2003, p. 250.

⁹² Citiamo la traduzione italiana di M. Zanatta: *“Cosa che compiono quelli che credono di disegnare le parallele: costoro infatti non si avvedono di assumere cose tali che non è possibile se non esistono le parallele”* (Aristotele, Organon, a cura di Marcello Zanatta, Vol. I, UTET, Torino, 1996, p. 397), e quella inglese di A. J. Jekinson: *“This is what those persons do who suppose that they are constructing parallel straight lines: for they fail to see that they are assuming*

struita, non sarebbe dimostrabile in una geometria nella quale non esistessero le parallele. E' questo infatti il caso che corrisponde all'ipotesi dell'angolo ottuso di Gerolamo Saccheri, in cui si hanno questi tre fatti tra loro interdipendenti:

- a. La retta non è infinitamente prolungabile
- b. La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due retti
- c. Non esistono rette parallele.

Ciò che Aristotele sembra dunque affermare, secondo quella che appare l'interpretazione più plausibile, è che per assicurare la validità della costruzione di rette parallele (cioè per dimostrare che rette costruite in un certo modo sono parallele nel senso di *non incidenti*) è necessario supporre qualche proposizione equivalente all'esistenza di rette parallele⁹³, quindi se qualcuno tenta di dimostrare l'esistenza del parallelismo costruendo delle rette parallele, incontra la circolarità considerata da Aristotele⁹⁴. Da quanto detto, segue che la proposizione richiesta non deve essere equivalente al quinto postulato e quest'ultimo non può essere quello (o equivalente a quello) voluto da Aristotele: infatti il quinto postulato è banalmente valido nel caso in cui non esistono parallele. Per dimostrare l'esistenza di rette parallele, in vece, basta una proposizione che consenta di negare quella che Gerolamo Saccheri denota come ipotesi dell'angolo ottuso. Negli elementi di Euclide una tale proposizione si può identificare con il secondo postulato (illimitata prolungabilità della retta). Tutto ciò, a nostro avviso, non inficia il discorso fondamentale di Toth, ma pone l'esigenza di una più precisa distinzione tra le due fondamentali questioni riguardanti le parallele: il problema dell'esistenza, garantito ove si dichiarò l'illimitata prolungabilità della retta, e il problema dell'unicità che richiede invece un enunciato uguale o equivalente al quinto postulato di Euclide. Ciò appare più chiaro, anche da parte di Toth, nel saggio introduttivo all'opera di Saccheri, scritto con Elisabetta Cattanei⁹⁵. Qui si dice infatti:

*“L'ipotesi per cui la somma degli angoli di un dato triangolo è maggiore di due angoli retti non è di per sé incoerente, e possiede anzi rilevanti implicazioni di tipo geometrico, però è inconciliabile con una proprietà fondamentale della retta, che è presupposta sia dall'ipotesi dell'angolo retto, sia dall'ipotesi dell'angolo acuto: la proprietà della retta di essere una linea di lunghezza infinita e aperta in entrambi i sensi”*⁹⁶.

Si tratta comunque di una distinzione che, da quanto si può capire dal passo di Aristotele, non doveva essere ancora ben chiara prima di Euclide, proprio perché non era stato individuato un principio primo da cui far discendere le proprietà del parallelismo e che apparisse ad un tempo semplice ed autoevidente secondo le richieste aristoteliche.

A suffragare la nostra interpretazione del passo aristotelico ci sono poi tutti gli altri passi di Aristotele che vengono citati dallo stesso Toth. In essi infatti vengono proposte, più volte e in vari contesti, ipotesi diverse da quella euclidea (somma degli angoli interni di un triangolo diversa da due retti). Tutte le volte però si tratta di ipotesi che non contemplanò una geometria di tipo iperbolico (angoli interni minore di due retti), bensì una geometria di tipo ellittico (somma degli angoli interni maggiore di due retti) nella quale non possono esistere rette parallele. Ciò risulta ben chiaro ad e-

facts which it is impossible to demonstrate unless the parallels exist? (Aristotle: *Prior Analytics*, Edizione elettronica M.I.T., Massachusetts, (<http://classics.mit.edu/Aristotle/prior.html>)).

⁹³ Notoriamente nella cosiddetta geometria ellittica, quale è per es. quella su una superficie sferica, comunque si diano due rette distinte, esse hanno sempre un punto comune. Se ci si pone in una geometria così fatta, la costruzione descritta sarebbe pur sempre una costruzione possibile e avrebbe senso: posso sempre da un punto P condurre la perpendicolare s alla retta r , e poi ancora da P la perpendicolare ad s . In questo caso però le rette r ed s non sono parallele, ma hanno un punto in comune. E' corretto dunque affermare che chi crede con la suddetta costruzione di “aver costruito (tracciato, disegnato) le parallele” deve prima dimostrare che la geometria non è ellittica, cioè che in essa **esistono le parallele**.

⁹⁴ Non si vede altrimenti quale circolarità comporti il fatto che per dimostrare il parallelismo tra due rette in qualche modo costruite si debba prima dimostrare l'esistenza di rette parallele.

⁹⁵ Saccheri, 2001.

⁹⁶ Ibid., p. 24.

sempio in un passo degli Analitici Primi⁹⁷, in cui, parlando delle contraddizioni che possono continuare a sussistere quando pur togliendo un'ipotesi falsa ne resta un'altra parimenti falsa, si fa riferimento, a scopo esemplificativo, a due possibili ipotesi: la prima che nega il teorema dell'angolo esterno, la seconda, di fatto equivalente, che la somma degli angoli interni di un triangolo sia maggiore di due retti; entrambe queste ipotesi sono tali da portare alla stessa contraddizione: l'incidenza di due rette già supposte parallele (“le rette parallele si incontrano”).

7. Conclusione.

Possiamo ora chiederci se l'analisi fin qui condotta ci consente di rispondere, almeno in parte, ai quesiti che ci eravamo posti: cioè di valutare quanto di originale ci sia in Euclide rispetto alla precedente tradizione e se la sua opera debba essere considerata come la *summa* di un pensiero scientifico sviluppatosi nel secolo precedente, o come l'apertura di una nuova fase della scienza.

Non diciamo nulla di nuovo nell'individuare la *questione delle parallele* come una questione da cui l'originalità del contributo euclideo emerge con evidenza, ma si tratta ancora di sapere se quella del nostro scienziato è solo una risposta, tecnicamente corretta ed anche importante, ad un problema però i cui termini erano già chiari e pienamente impostati, o se la soluzione stessa determina un salto qualitativo nella concezione del problema e della stessa geometria.

Tenteremo di formulare una risposta a più livelli. Un primo livello di novità della soluzione euclidea lo possiamo già evincere dal confronto con i passi di Aristotele in cui sono formulate ipotesi non euclidee. Queste, come abbiamo visto, non evidenziano alcuna distinzione tra i due problemi connessi al parallelismo: cioè l'esistenza e l'unicità della parallela. Negli Elementi, viceversa, le prime 28 proposizioni, dimostrate rigorosamente senza l'uso del quinto postulato, sembrano essere poste in quel preciso ordine proprio per rimarcare l'insussistenza, in virtù solo dei primi quattro postulati, di quella che per brevità abbiamo più volte indicato come *ipotesi dell'angolo ottuso*. Anzi la ventottesima proposizione potrebbe costituire implicitamente una risposta al passo di Aristotele citato da Toth. Diciamo “*potrebbe*” accentuando fortemente il condizionale, dal momento che come già visto non è molto probabile che Euclide conoscesse proprio quel passo⁹⁸. Il passo citato, però, testimonia di una questione che doveva essere aperta e che Euclide certamente conosceva per altra via. Solo a questo punto, con la ventinovesima proposizione, entra in scena il quinto postulato che risponde al secondo quesito del parallelismo: quello dell'unicità.

Questa risposta richiama subito una nuova domanda: Perché Euclide, pur consapevole di aver dato alla scienza una risposta certamente innovativa, non coglie l'occasione per evidenziare il proprio pensiero e affida tutto al solo linguaggio strettamente matematico degli enunciati e delle dimostrazioni? Purtroppo non ci sono pervenuti gli scritti matematici degli immediati predecessori di Euclide, non sappiamo quindi quale fosse il loro stile, ma rispetto a ciò che si conosce, possiamo dire che la *scelta del silenzio*, seguita sostanzialmente da altri scienziati coevi, non sarà più mantenuta nei secoli successivi ma si darà spazio a commenti, premesse e precisazioni. Verrà ripresa, in misura sempre crescente solo in epoca moderna per affermarsi in modo esclusivo nel novecento con il linguaggio dei bourbakisti. Potremmo fermarci qui e decidere che si è trattato solo di un fatto puramente casuale dovuto forse ad una scarsa attitudine alla scrittura da parte di Euclide. Ipotesi che non

⁹⁷ Anal. Pr. 66a 7-16 : “Di conseguenza, dato che la conclusione assurda si presenta, tanto se la proposizione *A B* sussiste, quanto se non sussiste, tale conclusione non deriverà da tale proposizione. Sennonché, quando diciamo che la conclusione falsa si sviluppa in misura non minore di prima, nel caso in cui venga a mancare la proposizione iniziale, sarà certo meglio intendere la cosa, non già nel senso che la conclusione assurda, se si assume un'altra proposizione, discenda egualmente, bensì nel senso che, una volta eliminata la proposizione iniziale, la medesima conclusione assurda venga dedotta mediante le rimanenti premesse. In effetti, si può dire che non vi sia nulla di strano nel fatto che una stessa conclusione falsa derivi da parecchie ipotesi. Non vi è da stupirsi, ad esempio, che due rette parallele si incontrino, sia nel caso in cui l'angolo interno risulti maggiore del corrispondente angolo esterno, sia nel caso in cui la somma degli angoli di un triangolo superi i due retti (236-237).”

⁹⁸ V. nota 29.

convince di per sé, ma che diventa ancora più improponibile se si confrontano ad esempio gli *Elementi* con i *Faenomena*, dove il discorso iniziale è ben più articolato e tende proprio a giustificare i principi che vengono assunti come base della trattazione. Il passo iniziale può essere reso infatti, per ciò che risulta a noi essenziale, nella forma “*Poiché le stelle sono percepite [come cose che si muovono in un certo modo, secondo le dimostrazioni dell’ottica], allora dobbiamo porre che [si muovano ... in quel modo]*”⁹⁹. L’intento di “*salvare i fenomeni*”, dandone una spiegazione geometrica, non potrebbe essere più evidente; e d’altra parte riteniamo che non abbia alcun senso chiedersi se ciò è inteso in maniera *realistica* o *strumentalistica* secondo l’interpretazione di Duhem. Non ha senso semplicemente perché l’autore non lo dice e forse non ha alcuna intenzione di dichiararlo!

Questo è l’unico caso, a noi noto, in cui Euclide ritiene necessario chiarire il proprio intendimento di “*salvare i fenomeni*”, forse perché nell’ambito dell’astronomia sarebbe più facile essere frainteso su questo punto; ma nulla si può trovare più. Come per gli elementi, nessuna giustificazione vi è, ad esempio, per i postulati dell’*Optica*¹⁰⁰, e però anche qui non è difficile scoprire l’intento di fornire la spiegazione matematica di un fenomeno (quello della visione); spiegazione richiamata per altro nei *Phaenomena*. Rinviando per il resto a quanto già detto a proposito del saggio della Incardona, vogliamo solo evidenziare un punto che contribuisce a rendere trasparente nell’*Optica* il carattere di modello matematico di una classe di fenomeni. Si tratta, come abbiamo già visto, della scelta di utilizzare una descrizione discreta anziché continua proprio in tal modo si riesce a rendere conto anche dei fenomeni connessi al potere risolutivo in funzione della distanza.

Dunque possiamo ben affermare (o per lo meno riteniamo sia molto più di una semplice supposizione) che opere come l’*Optica* e i *Phenomena* si pongano l’obiettivo di “*salvare i fenomeni*” ma senza pronunciarsi sul carattere realistico o meno della conoscenza scientifica. Né a questo punto si vede alcun motivo per pensare che così non sia anche per gli *Elementi*, dato che gli oggetti della geometria sembrano riguardare la forma spaziale dei corpi, così come da noi percepita e razionalmente organizzata.

Ed è proprio qui l’aspetto che appare forse il più innovativo se rapportato a quanto ci è dato sapere del precedente status epistemologico della scienza. Il fatto è che il *non pronunciarsi* sul carattere realistico o meno delle conoscenze scientifiche, rende queste ultime valide al di là delle diverse opzioni filosofiche in una fase storica di grande diversificazione delle idee.

Questo non significa però una generica indifferenza verso i problemi della filosofia, ma piuttosto una *sospensione del giudizio* rispetto alle questioni che, nel dato periodo storico, dividevano le diverse correnti di pensiero in modo apparentemente insanabile. Tali questioni sono proprio quelle che concernono lo *status* della *conoscenza possibile* e sono espressi, nei termini della loro più radicale opposizione, proprio dalla disputa tra accademici (Arcesilao-Carneade) e stoici (Zenone-Crisippo).

Che la scienza, quale si presenta con l’opera di Euclide, sia ben lungi dall’ignorare i problemi filosofici, è testimoniato dalla presenza, a livello formale, di quasi tutti gli elementi caratteristici della struttura deduttiva aristotelica. E tuttavia altrettanto chiari appaiono a questo punto i caratteri innovativi rispetto alla concezione della scienza espressa da Aristotele: soprattutto per ciò che riguarda l’effettiva e sicura rispondenza del sapere scientifico alla *realtà in sé*. Manca in altri termini, in Euclide, il pronunciamento sull’effettivo *essere* al di là del *fenomeno*, laddove la *verità*, assieme alla *semplicità* e *inderivabilità*, è per Aristotele il requisito fondamentale delle *arché*, proprio per garantire la verità dell’intero corpus della conoscenza scientifica. Ma neppure va trascurata la differenziazione formale, tanto nella terminologia (come l’espressione *κοινὰ ἐθνῶν*) quanto in ciò che il cambiamento stesso di terminologia può sottendere¹⁰¹. Così oggi possiamo dire che la sistemazio-

⁹⁹ EUCLIDES, *Phenomena*, 1, 1-10.

¹⁰⁰ V. INCARDONA.

¹⁰¹ E’ il caso di notare l’interpretazione data da Russo ad un’altra innovazione terminologica attribuita ad Euclide che, infatti, usa la parola *shmeiēh* per denotare il punto geometrico, in sostituzione del vecchio termine *stigmh*. Russo giunge alla conclusione che tale cambiamento terminologico fosse finalizzato all’abbandono di un precedente significa-

ne data da Euclide alla questione delle parallele, non poteva in precedenza essere né trovata né facilmente accettata, perché pur rispettando l'impianto formale deduttivo aristotelico, ne tradiva le premesse sostanziali: *l'autoevidenza delle arché, autoevidenza che si rivela nella "non ulteriore scomponibilità" in enunciati più semplici e si sostanzia nella "verità" unica e assoluta, condizione essenziale dell'essere in quanto essere.*

Se accettiamo questa chiave di lettura, non può sorprendere che la storia del quinto postulato, coincida con una ripresa del pensiero aristotelico e che sia tutta incentrata sul tentativo di *scomporre* il postulato in termini più semplici (o assolutamente semplici nel senso di non ulteriormente scomponibili). A questo proposito è ancora il caso di citare dall'etica eudemia un passo nel quale la derivazione sillogistica usata nelle dimostrazioni matematiche viene assimilata alla relazione che intercorre tra causa ed effetto¹⁰²: una relazione in cui la simmetria è esclusa. Dunque non tutte le possibili premesse che consentono di dimostrare la ventinovesima proposizione degli elementi si equivalgono: bisogna cercare la *più semplice*, la *più evidente*. La storia della critica al quinto postulato, dunque, inizia, per ciò che ne sappiamo, nel primo secolo a.C., con Posidonio, sulla base di un'esigenza che si può forse leggere nelle opere che noi oggi conosciamo di Aristotele, ma che evidentemente Euclide non avvertiva come tale. Che il periodo corrisponde pressappoco con il ritrovamento e la prima edizione delle opere aristoteliche precedentemente perdute¹⁰³, potrebbe essere solo una coincidenza, ma non è una coincidenza il fatto che la critica al quinto postulato abbia inizio con Posidonio e con il suo discepolo, o seguace, Gemino. Posidonio, infatti, non fu uno scienziato nello stesso senso di Euclide o di Archimede che cercava di riportare le scienze all'interno della filosofia e, anche se si poneva nell'aria del pensiero stoico, lo faceva contrapponendosi a Crisippo per molti aspetti per molti aspetti e cercando di recuperare elementi della precedente tradizione platonico-aristotelica.

Tornando ad Euclide, sembra dunque giustificata una interpretazione che ne trattegi la figura come quella di uno scienziato (in senso molto più moderno di quanto non si sia precedentemente ammeso) intento a produrre risultati coerenti e stabili, in grado di rendere conto della realtà fenomenica, e al riparo dalle dispute filosofiche. Che poi egli ritenesse, per sé, che le interrelazioni poste tra i *fenomeni* potessero e dovessero rispecchiare, o almeno approssimare, delle verità in sé, o che al contrario egli assumesse una posizione strumentalista, è qualcosa che trascende il discorso scientifico per riguardare l'uomo, l'individuo o, se si vuole, il personaggio storico di cui non sappiamo pressoché nulla; è qualcosa che forse non sapremo mai perché egli volutamente non lo dichiara, almeno nelle opere scientifiche a noi giunte.

Oggi sappiamo, *col senno di poi*, che non solo la *sospensione del giudizio* sui temi più strettamente ontologici e metafisici era il mezzo per una più generale accettazione e una maggiore efficienza dei metodi scientifici, ma altresì sappiamo che la stessa *sospensione del giudizio* sui temi più controversi è stato anche il prezzo che ha consentito a testi importanti come quelli di Euclide, di Apollonio e di Archimede, a differenza di quelli di Zenone, di Arcesilao e di Crisippo, di attraversare il filtro dei secoli immediatamente successivi e sopravvivere dopo duemilatrecento anni.

to realistico per un altro più tecnico e non realistico. Tuttavia va notato che la presenza della parola *shmeiēth* con lo stesso significato in qualche passo di Aristotele (V. ad es. Anal. Sec. 76 b 5) fa pensare ad un uso già preesistente.

¹⁰² Arist. Eth. Eud. 1222 b 15-42: "...Se infatti, poiché il triangolo ha gli angoli eguali a due retti, necessariamente il rettangolo ha quattro angoli retti, è evidente che la causa di ciò è il fatto che il triangolo ha gli angoli uguali a due retti. Se si mutasse il triangolo, necessariamente cambierebbe anche il rettangolo: ad esempio se il triangolo avesse gli angoli uguali a tre retti, il quadrato li avrebbe eguali a sei, se il triangolo li avesse eguali a quattro, il rettangolo li avrebbe eguali a otto. Se invece la proprietà del triangolo non muta e resta quella, è necessario che anche il rettangolo resti tale. [...]. Se infatti non v'è nessun'altra causa per cui il triangolo sia così, questo dovrà essere un principio e causa delle proprietà conseguenti." E' vero che, come precisato qualche rigo più sopra, l'assimilazione al concetto di causa per "le cose immobili" come quelle della geometria, viene fatta da Aristotele solo "per analogia", ma rimane una sostanziale asimmetria tra il *più semplice* (causa) e il *meno semplice* (effetto).

¹⁰³ V. nota 29.

BIBLIOGRAFIA

- AMALDI, U., *Sui concetti di retta e di piano*, in ENRIQUES, **1912**, pp. 41-108.
- ARISTOTLE, *Categoriae and De interpretatione* by E.M. Edghill, *Analytica priora* by A.J. Jenkinson ; *Analytica posteriora* by G.R.G. Mure ; *Topica and De sophisticis elenchis* by W.A. Pickard, Oxford University press, Cambridge-London, **1971**
- BALDASSARRI, M. (a cura di), *La logica stoica: testi originali con introduzione e traduzione commentata*, Como, **1984**.
- BERGTSON, H., *Griechische Geschichte: von den Anfängen bis in die romische Kaisezeit*, München, 1977. Traduz italiana di C. Tommasi: *L'antica Grecia dalle origini all'ellenismo*, Il Mulino, Milano, **1989**.
- ARRIGHI, G., *Note sugli Elementi di Euclide*, Atti del Convegno di Studi in memoria di G. Gemignani, Modena, **1995**, pp. 87-91.
- BOURBAKI, N., *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, **1960**.
- BIANCHI BANDINELLI, R., *La cultura ellenistica*, Voll. 7-8, Milano, **1977**.
- BOYER, C. B., *A history of Mathematics*, 1968. Traduz. italiana: *Storia della matematica*, ISEDI, Milano **1976**.
- CANFORA, L., *Ellenismo*, Laterza, Roma – Bari, **1995**.
- COHEN, M., DRABKIN, I. E., *A source book in Greek science*, McGraw-Hill, **1948**.
- COLLI, G., (Editor), Aristotele: *Organon*, Adelphi, Milano, **2003**.
- DUHEM, P., *Salvare i fenomeni : saggio sulla nozione di teoria fisica da Platone a Galileo*, Italian edition by Francesco Bottin, Roma, 1986. Original essay: *swzein tal fainomena*, Annales de Philosophie Chrétienne, VI, pp. 113-39, 277-302, 352-77, 482514, 561-92, **1908**.
- DUHEM, P., *Le système du monde : histoire des doctrines cosmologiques de Platon a Copernic*, Paris - **1956-1973**.
- EDELSTEIN, L., *Moderni indirizzi nell'interpretazione della scienza greca*, in WINER, and NOLAND (V.). Trad. italiana **1971**, pp. 91-130.
- ENRIQUES, F., (a cura di), *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari*, Bologna: Zanichelli, **1912**.
- ENRIQUES, F., (a cura di), *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, (transl.: Zapelloni M. T; Introd. and Remarques by Enriques, F.), 3 Voll., **1912-1935**
- ENRIQUES, F., *L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco*, in ENRIQUES, **1912**, Vol. II, pp. 1-40.
- ENRIQUES, F., DE SANTILLANA, G., *Compendio di storia del Pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna, **1937**.
- EUCLIDES, *Euclidis Opera Omnia*, Editors: L. Heiberg and H. Menge, Leipzig, **1883-1916**.
- FLOWER, D. A., *I lidi della conoscenza: la storia dell'antica biblioteca di Alessandria*, Bardi, Roma, 2002.
- FARRINGTON, B., *Greek science : its meaning for us*, Penguin books, Harmondsworth, **1944**.
- FRASER, P. M., *Ptolemaic Alexandria*, 3 Voll., Oxford, **1972**.
- GUARDUCCI, A., *Della Congruenza e del movimento*, in ENRIQUES, **1912**, pp. 109-142.
- GEYMONAT, L., *Storia del pensiero scientifico e filosofico*, Vol. I, Milano: Garzanti, **1973**.
- GUGGENHEIMER, H., *The axioms of betweenness in Euclid*, Dialectica, 31, (1-2), **1997**, pp. 187-192.
- GULLINI, G., *L'ellenismo*, Jaca Book, MILANO, 1998.
- HEATH, T. L., *A history of Greek mathematics*, **1**, Oxford, **1931**.
- HEATH, T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (3 Volumes), New York, **1956**.
- INCARDONA, F. (a cura di), *Euclide: Ottica. Immagini di una teoria della visione*, Di Renzo, **1996**
- IOPPOLO, A. M., *Opinione e scienza: il dibattito tra stoici e accademici nel 3° e 2° secolo a. C.*, Napoli, **1986**.
- ISNARDI PARENTI, M. (a cura di), *Gli Stoici, Opere e Testimonianze*, 2 v., Torino, **1994**.
- ISNARDI PARENTI, M., *Lo stoicismo ellenistico*, LATERZA, BARI, **1999**.
- KLINE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, **1972**, Traduz. italiana di Lamberti L., a cura di Conte A.: *Storia del pensiero matematico*, Vol I, Torino: Einaudi, **1991**.
- LAKATOS, I., *Proof and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, **1976**. Traduz. italiana di D. Benelli: *Dimostrazioni e Confutazioni. La logica della scoperta matematica*, a cura di G. Giorello, Milano, **1979**.
- LÉVI, C., *Les Philosophies hellénistiques*, PARIS, 1997, Italian transl. by A. Taglia: *Le filosofie ellenistiche*, Torino, **2002**.
- LORIA G., *Le scienze esatte nell'antichità*, Milano, **1914**.
- LOSEE, J., *A Historical Introduction to the Philosophy of Science*, Third Ed., Oxford University Press, **1993**. Traduz. italiana di D'Agostino M.: *Filosofia della scienza: un'introduzione*, Milano, **2001**.
- LLOYD, G. E. R., *Methods and Problems in Greek Science*, Cambridge, 1991. Traduz. italiana di F. Aronadio e E. Spinelli: *Metodi e problemi della scienza greca*, Laterza, **1993**.
- PENAM, J., *Ευκλείδου Οπτικᾶ καὶ Κατοπτρικᾶ*, *Euclidis Optica & Catoptrica nunquam antehac graece aedita eadem latine reddita*, Parisiis apud Andream Wechelum, **1557**.
- PLATONE, *Opere Complete con testo a fronte*, edizione elettronica, Laterza, 2000.
- POINCARÉ, H., *La valeur de la science*, Paris, **1914**. Traduz. italiana: *Il valore della scienza*, a cura di G. Polizzi, Scandicci, : **1994**.
- POPPER, K., *The open society and its enemies*, I, *The spell of Plato*, Traduz. italiana: *La società aperta e i suoi nemivi*, vol. I – *Platone totalitario*, Roma, **1973**.
- PROCLIO DIADOCO, *Commento al 1. libro degli Elementi di Euclide*, a cura di M. Timpanaro Cardini, Pisa, **1978**.

- REALE, G., (a cura di), Aristotele: *Metafisica*, Bompiani, Milano, **2000**.
- RUSSELL, B., *History of Western Philosophy*, London, **1961**.
- RUSSO L., Sulla non autenticità delle definizioni degli enti geometrici fondamentali contenute negli 'Elementi' di Euclide, Bollettino dei classici, Accademia dei Lincei, XIII, **1992**, 25-44.
- RUSSO, L., *La rivoluzione dimenticata: il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*, Milano: Feltrinelli, **1997**.
- RUSSO, L., *The definitions of fundamental geometric entities contained in book I of Euclid's Elements*, Arch. Hist. Exact. Sci., 52, No.3, **1998**, pp.195-219.
- SACCHERI, G. G.; *L'euclide emendato*, a cura di G. Boccardini, Milano, **1904**.
- SACCHERI G., *Euclide liberato da ogni macchia*, Saggio introduttivo di I. Toth e E. Cattanei ; Traduzione e apparati di P. Frigerio, , **2001**
- SEIDEMBERG, A., *Did Euclid's 'Elements, Book I', develop geometry axiomatically?*, Arch. Hist. Exact Sci., 14, (4), **1975**, pp. 263-295.
- TANNERY, P., *Sur l'autenticité des axiomes d'Euclide*, Bulletin des Sci. Math. Et Astr., 1884, p. 162.
- TOTH, I., *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, Milano, **1997**.
- TREDENNICK, H. (transl.) Aristotle MA, Harvard University Press; London, **1989**.
- TRUDEAU, ; *The non-euclidean revolution*, Boston [etc.] : Birkhauser, 1987. Traduz. italiana di A. Llbanko: *La rivoluzione non euclidea*, Torino, **1991**.
- VERONESE, G. - *Osservazioni sui principii della geometria*, Padova, **1894**.
- WINER, P. P. and NOLAND, A. (Editors); *Roots of scientific thought. A cultural perspective*; New York, **1957**. Italian transl.: *Le radici del pensiero scientifico*", Milano, **1971**.
- ZANATTA, M., (Editor), Aristotele: *Organon*, UTET, Torino, **1996**.
- ZEUTHEN H.G., *Die geometrische Konstruktion als 'Existenzbeweis' in der antiken Geometrie*, Mathematische Annalen, 47, **1896**.