

IMMAGINI DELLA MATEMATICA NELLA FORMAZIONE SCOLASTICA¹.

Renato Migliorato²

Premessa: Queste pagine costituiscono parte di un più ampio lavoro destinato alla pubblicazione sugli Atti di un convegno internazionale di Cibernetica Scolastica organizzato a Messina all'inizio degli anni '90 dall'Istituto di Psicologia della Facoltà di Magistero per iniziativa del Prof. Aldo Nigro. Quegli atti non furono poi pubblicati e pertanto il lavoro rimase inedito. Lo ripropongo qui a distanza di oltre dieci anni, senza variazioni, ma limitatamente alla parte che riguarda i risultati di due test sull'immagine della matematica tra gli alunni delle scuole. Per quanto riguarda le conclusioni devo dire che oggi ho modificato in parte le mie opinioni circa le ragioni che sono di ostacolo ad una più profonda maturazione nel modo di vedere la scienza e la matematica. A tale riguardo v. il mio articolo "L'astrazione matematica tra fantasia, conoscenza e ricadute tecnologiche" di prossima pubblicazione.

1. Introduzione.

Il presupposto fondamentale da cui nasce il presente lavoro è che la formazione matematica non può ridursi al solo apprendimento delle tecniche, ma presuppone un percorso intellettuale il cui risultato ultimo dovrebbe essere una *forma mentis* entro cui trovano posto in forma consapevole tanto la dimensione formale, quanto la dimensione intuitiva e immaginativa pre-formale.

Tenendo conto delle linee evolutive del pensiero, la dimensione pre-formale dovrebbe essere la prima a giungere a maturazione, mentre la dimensione formale dovrebbe giungere a un livello di piena consapevolezza durante il corso della scuola secondaria superiore³.

Per valutare quanto ciò avvenga realmente, sono stati ideati e somministrati alcuni test che cercano il più possibile di prescindere dai contenuti tecnici, per verificare la sussistenza di alcuni parametri indicativi della maturazione raggiunta in direzione di una *forma mentis matematica* e della relativa consapevolezza.

I contenuti matematici in senso tecnico sono generalmente molto semplici e tali da potersi ritenere sempre acquisiti (salvo casi eccezionali) nella fascia scolastica a cui si riferiscono. Quesiti implicanti conoscenze meno semplici non sono finalizzati a valutare le conoscenze stesse, che possono non sussistere, ma a saggiare le reazioni degli alunni di fronte a un problema che val al di là delle loro attuali conoscenze (ad es., nella scuola media, il quesito sul quadrato di area doppia di un dato quadrato).

2. Il test n. 1 (per la scuola media).

Il test somministrato nella scuola media è diretto a rilevare: 1) il grado di maturazione intuitiva e immaginativa; 2) la correttezza nell'uso di concetti semplici posseduti ad un livello pre-formale; il livello di astrazione e di razionalizzazione delle problematiche poste. Non è attesa, naturalmente, alcuna consapevolezza del carattere formale della matematica.

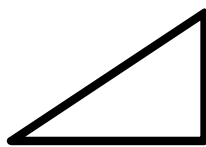
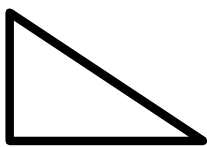
I quesiti previsti dal questionario sono i seguenti.

¹ Il presente lavoro nasce da ricerche effettuate nell'ambito del Nucleo di Ricerca Didattica diretto dall'autore e finanziato dal C.N.R.

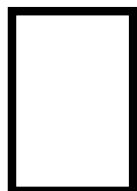
² Dipartimento di Matematica, Università di Messina.

³ R. MIGLIORATO. *Dall'esperienza alla formalizzazione nell'insegnamento matematico*, Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza, Atti, Bologna, 1992, pagg.171-178.

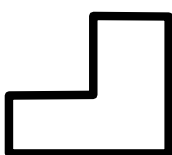
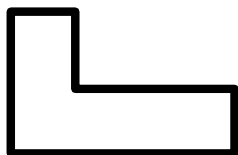
1. Quali delle seguenti coppie sono formate da figure uguali ?



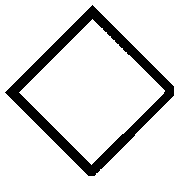
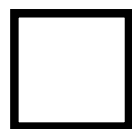
a



b



c



d

2. Qual è il numero maggiore?

-55

a

16

b

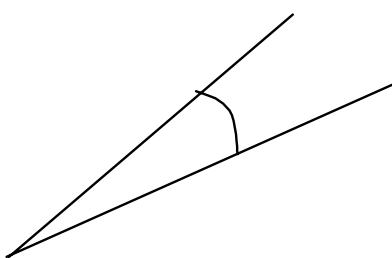
3

c

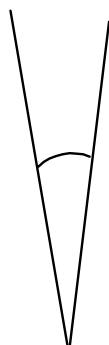
-1

d

3. Qual è l'angolo maggiore?



a

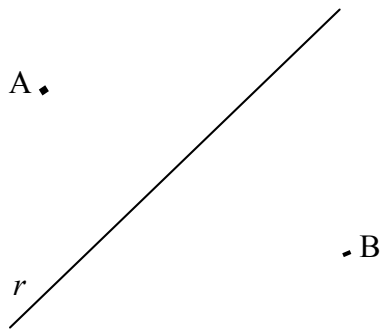


b



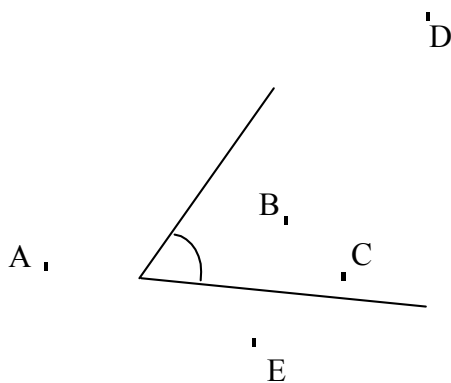
c

4. E' possibile unire i punti A e B con una linea che non interseca la retta r ? Se si tracciare tale linea.


 SI

 NO

5. Quali punti cadono dentro l'angolo ?


 a

Tutti
 b

B e C
 c

B, C e D
 d

A ed E

6. Quanti punti ci sono nel segmento AB


 a

Molti
 a

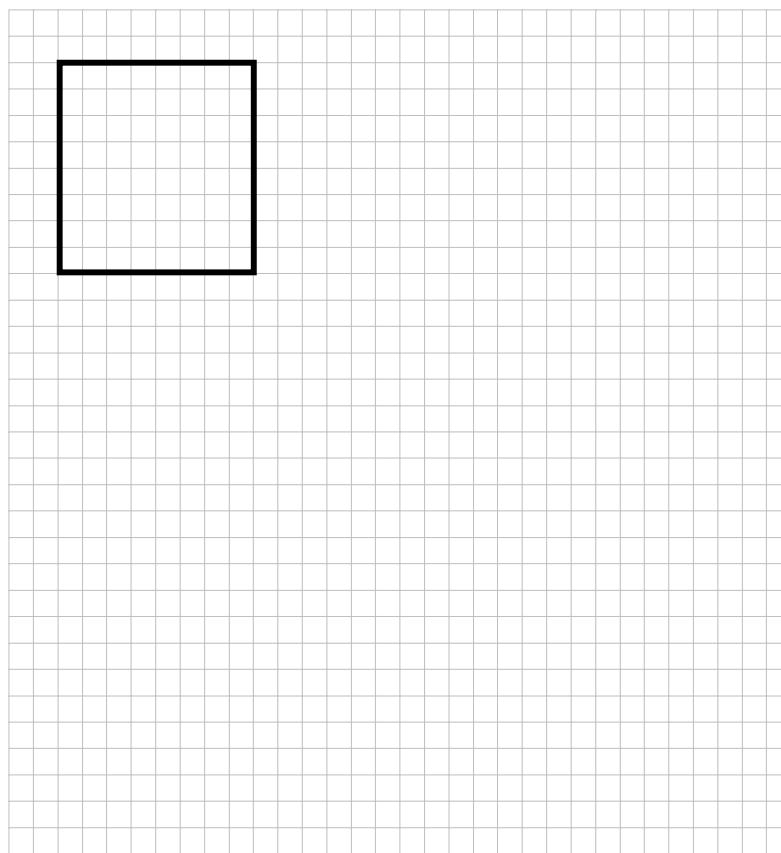
10
 a

12
 a

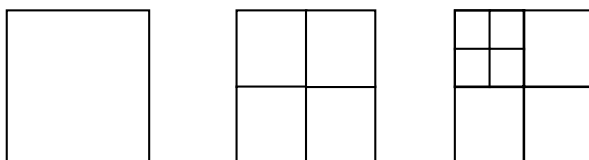
Infiniti
 a

Quanti se ne vogliono

7. Disegna il quadrato di area doppia



8. Disegna la quarta figura della sequenza



Il test è stato sottoposto alle terze classi di una scuola media di Messina. Alla stesura, alla somministrazione e all'elaborazione del test ha collaborato la dott. Carmela Iracà, che ne ha citato i risultati nella sua tesi di laurea.

Risultati del test:

Quesito n.1:

- riconosce uguali le coppie a , b e d l'82,7%.
- l'uguaglianza della coppia a è riconosciuta dal 99,3%.
- l'uguaglianza della coppia d è riconosciuta dal 95,4%.
- l'uguaglianza della coppia b è riconosciuta dal 86,36%.

Quesito n. 2:

- Risponde correttamente il 91,8%.

Quesito n. 3:

- Le risposte sono tutte corrette.

Quesito n. 4:

- Risponde sì il 56,36 % e traccia un arco di curva che congiunge A con B senza incontrare il segno grafico indicato con r.

Quesito n. 5:

- Risponde esattamente il 53,6%. Trascura il punto D il 43,6%.

Quesito n. 6. Le risposte sono:

- Molti 3,64%
- 10 5,45%
- 12 74,54%
- infiniti 15,45%
- quanti se ne vuole 0,9%.

Quesito n. 7:

- Dà una risposta che può considerarsi esatta il 7,27%.
- Compie tentativi abbastanza vicini ad una soluzione il 7,27%.
- Compie tentativi lontani dalla soluzione il 12,73%.
- Non risponde il 6,36%.
- Disegna il quadrato di lato doppio il 66,36%.

Quesito n. 8:

- Risponde esattamente il 33,63%.

Conclusioni sul primo test.

Le risposte ai primi tre quesiti consentono di classificare il campione nella media senza significative presenze di ritardi gravi. Gli alunni dimostrano, nella stragrande maggioranza, di avere assimilato l'idea di uguaglianza come invariante per movimento, l'ordinamento numerico e il confronto di angoli.

Le risposte ai quesiti 4, 5 e 6 denotano difficoltà di astrazione. Gli alunni tendono, in maggioranza a prendere in considerazione solo ciò che è effettivamente tracciato sulla carta, trascurando i relativi prolungamenti e generalizzazioni. In presenza di un angolo (quesito 4), l'attenzione viene fissata solo nella zona vicina al vertice dove i lati sono **effettivamente** tracciati sulla carta. Di una retta (quesito 5) viene preso in considerazione solo il segmento visibile e i punti effettivamente segnati (quesito 6). Le risposte al quesito 7 denotano, nella maggioranza dei casi, una difficoltà di razionalizzazione del problema. I più si fidano del primo immediato impulso (il raddoppio del lato) senza tentare alcuna verifica razionale, altri rinunciano, altri ancora compiono tentativi casuali ma non aiutati da una consuetudine all'ideazione.

Considerazioni analoghe valgono in relazione al quesito 8, dove però si può pensare a difficoltà di coordinamento delle varie parti che compongono la figura.

3. Il test n. 2. (Scuole secondarie di 2° grado)

Il test pensato per le scuole secondarie superiori ha per scopo fondamentale, quello di accertare l'evoluzione del pensiero matematico nel corso dei cinque anni.

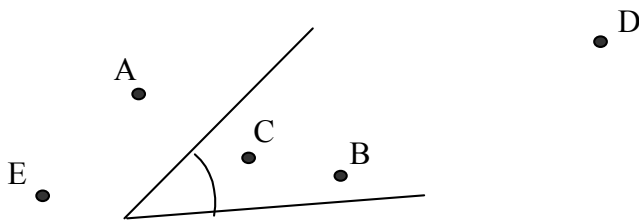
Il primo quesito tende a rilevare se e di quanto è superata la difficoltà, già riscontrata in terza media, di concepire la figura geometrica al di là delle linee tracciate sulla carta. A tale scopo viene usato lo stesso quesito sui punti appartenenti o no ad un dato angolo.

I quesiti dal 2 al 5 riguardano, come si è detto, il carattere formale della matematica, ed in particolare il 2 e il 3 sono formulati per permettere un reciproco controllo.

L'ultimo quesito, in cui è permesso dare più risposte, tende a rilevare se e quanto, sulla base della propria esperienza formativa, gli studenti percepiscano la dimensione creativa e immaginativa della matematica.

I quesiti previsti dal questionario sono i seguenti.

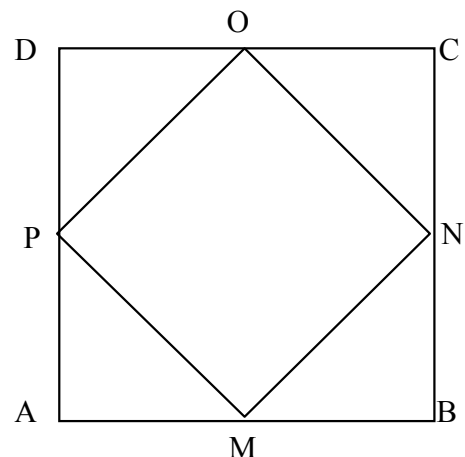
- • • **1.** Considera l'angolo acuto della figura seguente. Quali tra i punti rappresentati nella figura sono interni all'angolo?



- 2.** Dato il quadrato ABCD Siano M, N, O, P i punti medi dei lati AB BC CD e DA. La figura MNOP è anch'essa un quadrato.

Quest'affermazione necessita di una dimostrazione?

- | | |
|---|---|
| 1 | No, perché è immediata ed evidente. |
| 2 | No, perché non è un teorema. |
| 3 | Sì, perché non è tra gli assiomi accettati. |
| 4 | Sì, perché non è abbastanza evidente. |
| 5 | Non si può dimostrare perché non è vera. |



3. Quando una proposizione matematica dev'essere dimostrata prima di poterla accettare?

- 1 Quando non si è sicuri che sia vera.
- 2 Quando non è stata enunciata come assioma.
- 3 Quando non è abbastanza evidente per chiunque.
- 4 Quando si vuole essere estremamente rigorosi

4. Secondo te gli oggetti della geometria (rette, punti, eccc...)

- 1 Sono enti ideali e astratti indipendenti dalla realtà
- 2 Sono enti reali
- 3 Esprimono la realtà spaziale.
- 4 Sono proprietà spaziali degli oggetti reali e ne esprimono la forma

5. Secondo te i teoremi sono

- 1 Verità assolutamente certe perché rigorosamente dimostrate
- 2 Verità non abbastanza evidenti e che quindi richiedono una dimostrazione
- 3 Conseguenze logiche degli assiomi

6. Quale delle seguenti doti, secondo è importante per far bene in matematica (puoi indicare più di una).

- 1 Creatività
- 2 Pazienza.
- 3 Intuizione
- 4 Memoria

Il test è stato somministrato in due licei classici, un liceo scientifico, un istituto tecnico industriale. Qui esporremo in dettaglio solo i risultati del liceo classico (campione di 279 alunni), perché riteniamo che quelli relativi alle altre due scuole richiedano ulteriori controlli. Quanto all'Istituto tecnico possiamo dire che i dati in nostro possesso confermano qualitativamente quelli del liceo classico: resta da verificare se gli scostamenti quantitativi non siano, almeno in parte, da attribuire a problemi di competenza linguistica. I dati del liceo scientifico risultano invece inattendibili perché vi è

una totale uniformità di risposte nell'ambito di ciascuna classe, e una totale difformità tra classi diverse, il che fa pensare che le risposte siano state formulate collettivamente (la sorveglianza era affidata agli insegnanti delle scuole in cui i test sono stati somministrati). Tuttavia, come si vedrà in seguito, si può trarre qualche indicazione anche in questo caso.

Risultati del test nei licei classici.

Quesito n. 1

- Individua il punto D come interno all'angolo il 67% (risposta attesa).

Quesito n. 2

- No perché è immediata ed evidente il 76%.
- No perché non è un teorema il 3%
- Sì perché non è tra gli assiomi accettati il 14% (risposta attesa).
- Sì perché no è abbastanza evidente 3%.
- Non risponde 4%

Quesito n. 3

- Quando non si è sicuri che sia vera 15%.
- Quando non è stata enunciata come assioma 65%. (risposta attesa).
- Quando non è abbastanza evidente per chiunque 8%.
- Quando si vuole essere estremamente rigorosi 1%.
- Non risponde 11%.

Quesito n. 4

- Sono enti ideali e astratti indipendenti dalla realtà 14% (risposta attesa).
- Sono enti reali 19%.
- Esprimono la realtà spaziale 23%.
- Sono proprietà spaziali degli oggetti reali e ne esprimono la forma 43%.
- Non risponde 1%

Quesito n. 5

- Verità assolutamente certe perché rigorosamente dimostrate 47%.
- Verità non abbastanza evidenti e che quindi richiedono una dimostrazione 34%.
- Conseguenze logiche degli assiomi ma senza un assoluto valore di verità 10% (risposta attesa).

- Non risponde 9%.

Quesito n. 6 (il totale delle percentuali supera il 100% perché erano ammesse più risposte)

- Creatività 6% (risposta attesa).
- Pazienza 29%.
- Intuizione 81%.
- memoria 23%.

Prima analisi dei risultati.

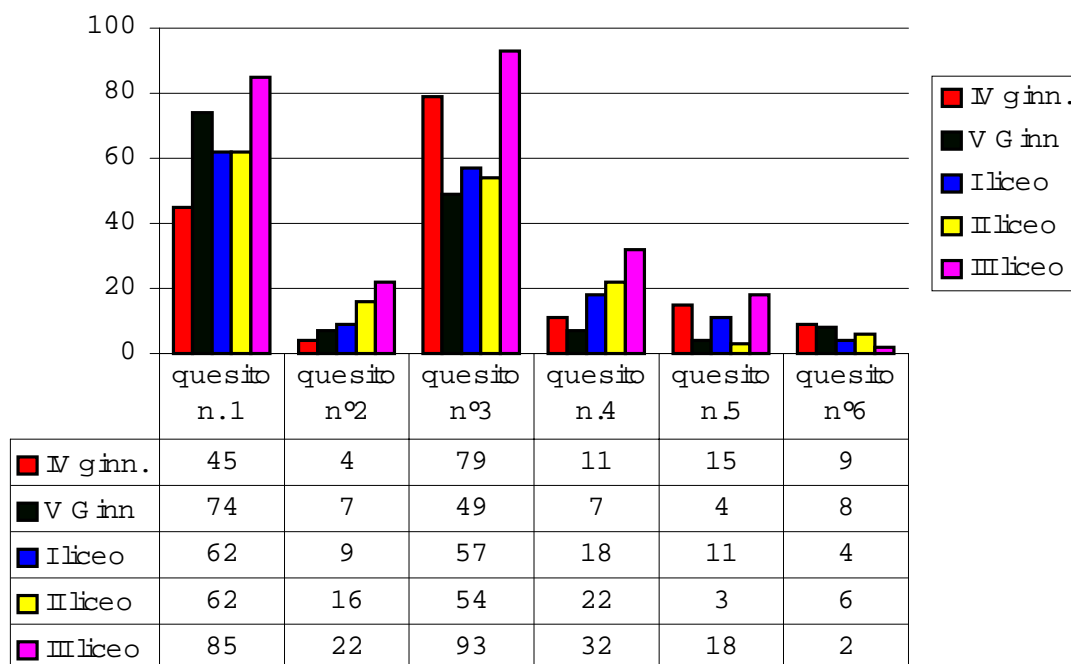
Le risposte al primo quesito dimostrano il permanere in un numero significativo di studenti, di una non chiara distinzione tra il concetto di angolo e la sua rappresentazione grafica.

Le risposte al 3° quesito evidenziano che esiste, per la maggioranza (65%), un'informazione sul carattere ipotetico-deduttivo della matematica, ma quest'informazione non è intimamente maturata, come dimostrano le risposte al 2° quesito. Dal 4° e 5° quesito si deduce che non vi è, in generale una consapevolezza del carattere formale; si è ancora legati all'idea di *verità* e si attribuisce *realità* agli oggetti matematici. Sarebbe interessante, nei prossimi test, aggiungere qualche quesito sulla natura degli assiomi.

Bassissima la percentuale di coloro che considerano rilevante la creatività. Significativo anche il 23% che attribuisce valore alla memoria.

Fino a questo punto abbiamo analizzato i dati complessivi per l'intero ciclo scolastico. E' necessario ora dire che lo stesso questionario è stato somministrato a tutte le classi dalla IV ginnasio alla terza liceo (come si è fatto del resto nelle altre scuole somministrando il questionario dalla prima alla quinta classe, allo scopo di valutare l'andamento evolutivo del pensiero degli studenti.

Riportiamo nel seguente grafico i risultati disaggregati per classe, limitatamente alle percentuali delle risposte attese. Per quanto riguarda il quesito n. 6 sono riportate le risposte di coloro che ritengono utile la creatività.



Il grafico mostra una notevole variabilità, via via che dalla prima classe si passa all'ultima. Questa variabilità per alcuni quesiti (in particolare il primo e il terzo) si presenta molto irregolare e quindi imputabile in parte a fattori casuali. Occorre quindi fare una premessa metodologica sui limiti insiti nella scelta del campione. Innanzitutto l'ideale, volendo studiare l'evoluzione di pensiero nel tempo, sarebbe di seguire lo stesso campione nel corso di cinque anni. Ma a parte le difficoltà di attuazione della ricerca, si correrebbe il rischio, sottoponendo più volte gli stessi alunni allo stesso test (o comunque a test strettamente affini) di inquinare la genuinità delle risposte. I fattori casuali più frequenti si riferiscono alle condizioni di partenza degli alunni già al loro ingresso, ai possibili cambiamenti di insegnanti, di libro di testo, ecc... Si è cercato di ovviare in parte a questi elementi di variabilità considerando tutte le classi di quattro sezioni parallele scelte in due diversi licei, potendosi ritenere che la variazione di condizioni, in classi appartenenti alla stessa sezione, sia con molta probabilità minore di quanto non lo sia tra sezioni diverse; in seguito si potrà ulteriormente minimizzare la variabilità casuale operando su un campione più ampio. Riteniamo tuttavia che alcune indicazioni siano già evidenti.

Innanzitutto si può osservare che, seppure in misura decrescente, il problema segnalato dal quesito n.1 continua a persistere fino alla fine della scuola secondaria superiore. Dai risultati ottenuti negli altri ordini di scuola (di cui abbiamo ommesso qui il dettaglio) risulta che lo stesso problema si ritrova negli alunni degli istituti tecnici industriali, e in questo caso con una variabilità d'incidenza ancora maggiore. Sembra invece essere assente nel liceo scientifico (almeno sulla base del test effettuato e con i limiti di attendibilità sopra accennati). Ma questo indicherebbe solo una maggiore attitudine sul piano tecnico-operativo da parte di coloro che scelgono di proseguire gli studi al liceo scientifico, e non direbbe comunque molto sull'evoluzione del pensiero. Sempre i dati del liceo scientifico, sia pure con la scarsa attendibilità statistica di cui si è detto, confermano le linee di fondo che emergono dal test sul liceo classico. Infatti, fatta l'eccezione del primo quesito, a cui tutti rispondono esattamente, occorre dire che se in una classe tutti gli alunni indicano, relativamente a un dato quesito, la risposta attesa, nella classe parallela di un'altra sezione, tutti gli alunni indicano una risposta diversa, ecc...

L'unico quesito rispetto al quale si evidenzia una sicura evoluzione è il quesito n. 2, relativo alla comprensione del metodo deduttivo; tale evoluzione riguarda però un numero minoritario di alunni che non supera il 20% circa. Il quesito n. 3 dà risultati apparentemente migliori, anche se molto variabili. Esso però si riferisce al grado di informazione sul metodo ipotetico deduttivo, non alla sua interiorizzazione, ed ha quindi scarso significato culturale ove manchi la conferma del quesito n. 2. Modeste e spesso contraddittorie risultano le risposte ai quesiti n. 4 e n. 5. Se un discreto numero di alunni si rende conto che gli enti della matematica sono oggetti ideali, indipendenti dal mondo reale, non si comprende poi in che senso si attribuisce valore di verità ai teoremi.

Va osservato infine che, a giudicare dai risultati del presente test, il bassissimo numero di coloro che considerano significativa la creatività, tende a decrescere col progredire degli studi.

Questo dato mi sembra tra i più significativi, perché evidenzia i rischi, nella formazione intellettuale dei giovani, di una presentazione della matematica tutta racchiusa in un tecnicismo puramente operativo, rivolto esclusivamente al risultato, che non dà spazio al libero gioco dell'intelletto.

Concludendo possiamo dire che la scuola, oggi, fornisce ai giovani un'immagine inadeguata della matematica, un'immagine che non rende conto né del carattere formale di questa scienza, né del suo essere creazione libera del pensiero. In conseguenza di ciò l'evoluzione del pensiero matematico risulta pressoché nulla durante tutto il corso della scuola secondaria superiore, quale che sia il grado di abilità tecnica raggiunto.